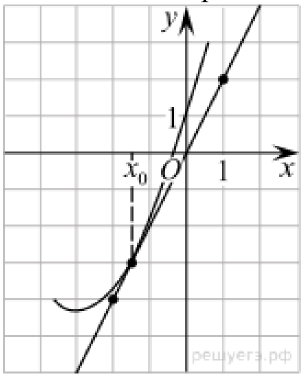
§1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ: КАСАТЕЛЬНАЯ

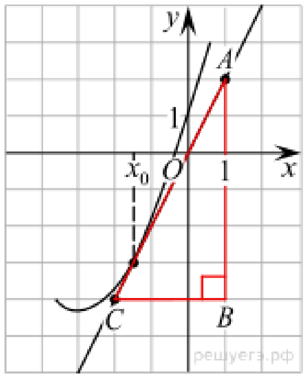
ПРИМЕР 1

На рисунке *а)* изображён график функции ***y = f(x)*** и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции ***f(x)*** в точке $\boldsymbol{x_0}$.

а)



б)



РЕШЕНИЕ:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (1; 2), B (1; −4), C(−2; −4), две из которых (в данном случае A и C) зачастую уже отмечены жирными точками на касательной для облегчения построения прямоугольного треугольника. Точка x_0 не участвует в построении треугольника! См. рис. *б)*.

Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB:

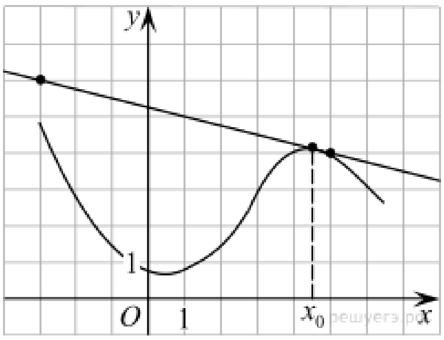
$$y'\ (x_0) = \operatorname{tg}\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

<u>УПРОЩЕНИЕ:</u> Вертикальный отрезок делим на горизонтальный отрезок и всё.

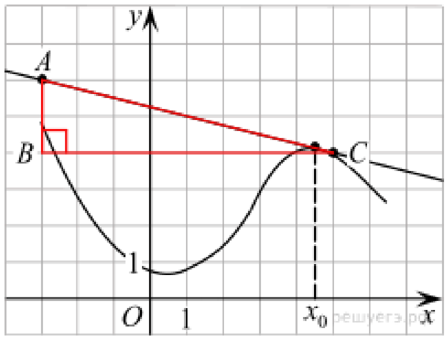
Ответ: 2

ПРИМЕР 2

а)



б)



На рисунке *а)* изображены график функции ***y = f(x)*** и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции ***f(x)*** в точке $\boldsymbol{x_0}$.

РЕШЕНИЕ:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (−3; 6), B (−3; 4), C (5; 4). На рис. *б)* показан этот треугольник. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, **смежному** с углом ACB:

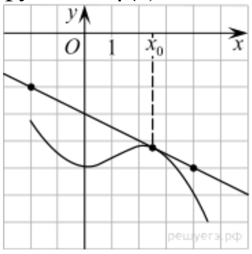
$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0,25.$$

<u>УПРОЩЕНИЕ:</u> Вертикальный отрезок делим на горизонтальный отрезок и добавляем минус.

Ответ: -0,25

1.1

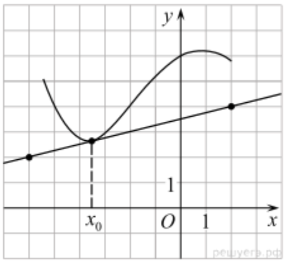
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.2

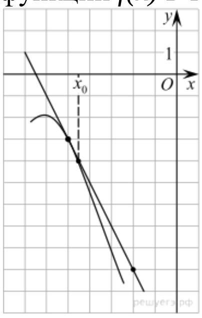
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.3

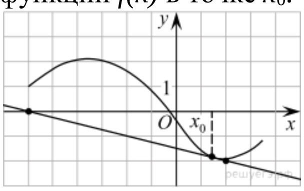
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.4

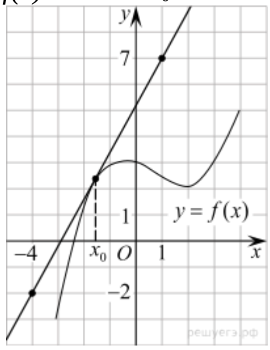
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.5

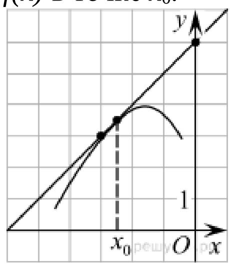
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0.
Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.6

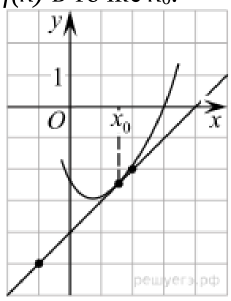
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0.
Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.7

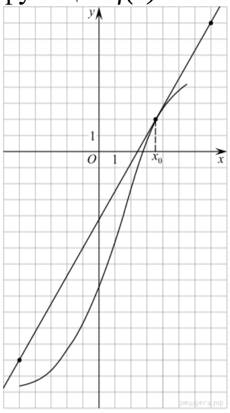
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0.
Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.8

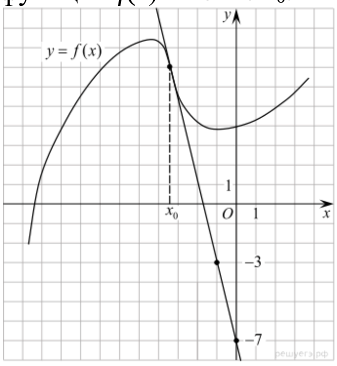
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.9

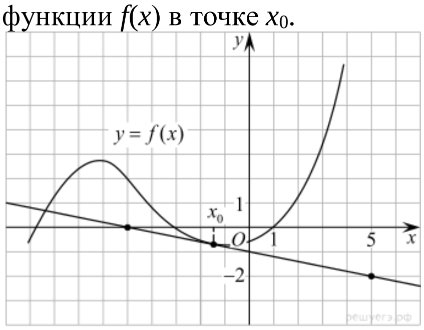
На рисунке изображен график функции $f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.10

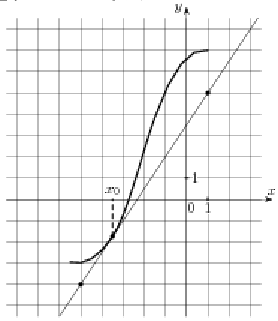
На рисунке изображен график функции $f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.11

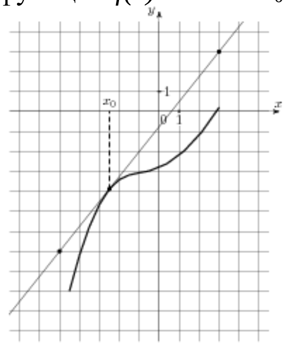
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.12

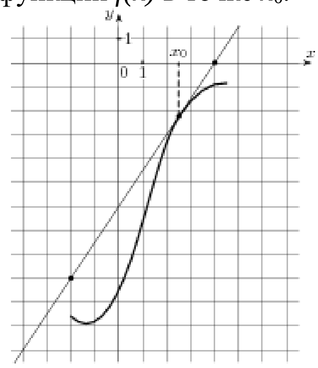
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.13

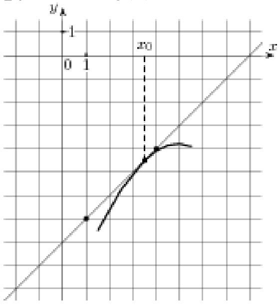
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.14

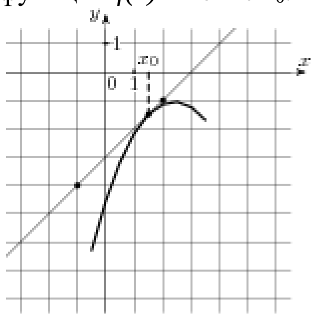
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.15

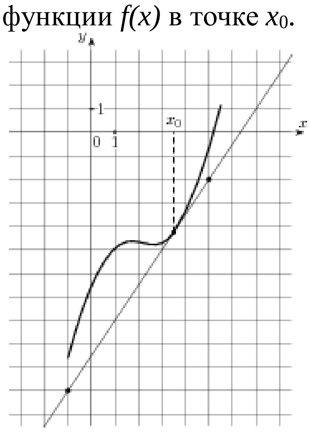
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.16

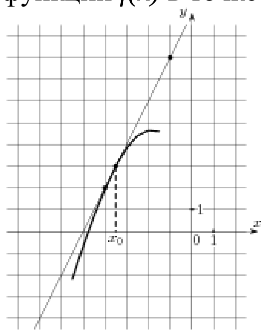
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.17

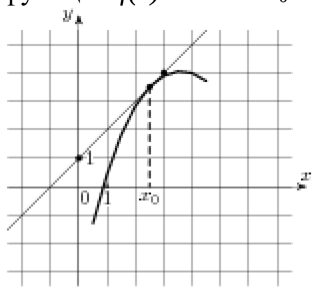
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.18

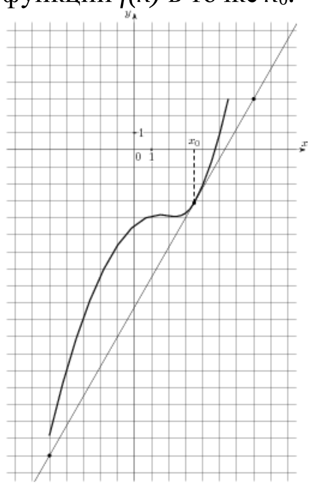
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.19

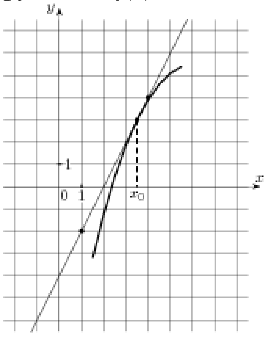
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.20

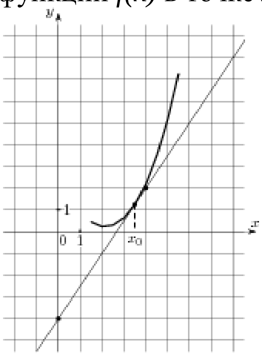
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.21

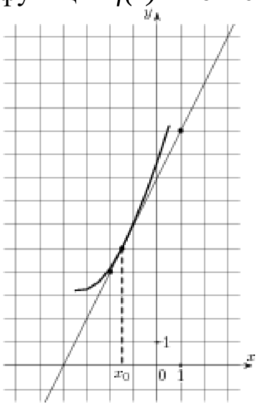
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.22

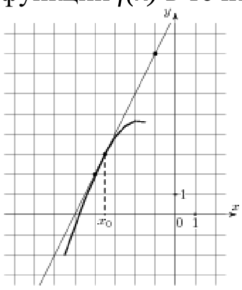
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.23

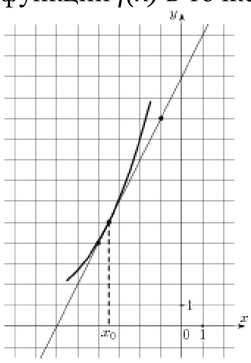
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.24

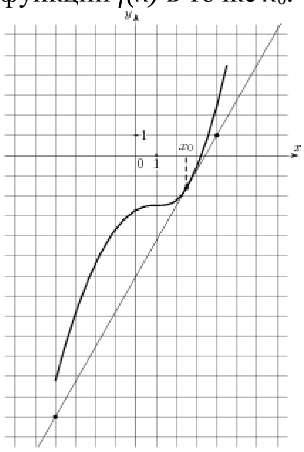
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.25

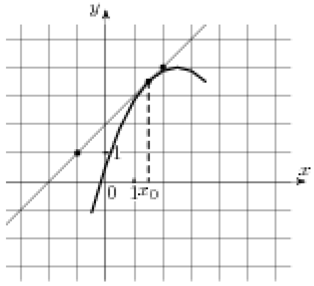
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.26

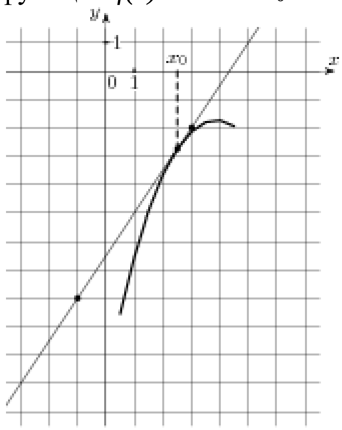
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.27

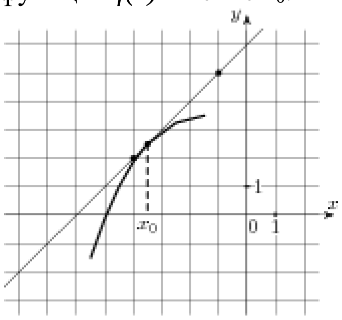
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.28

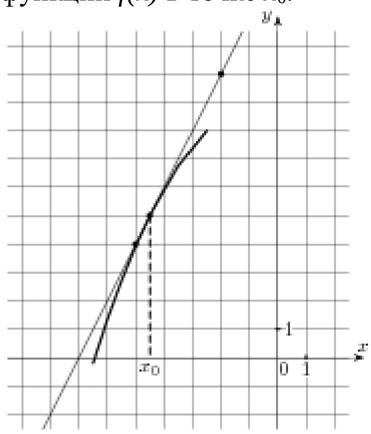
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.29

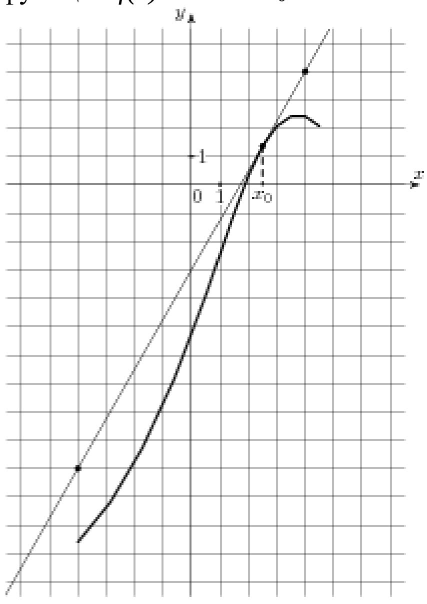
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.30

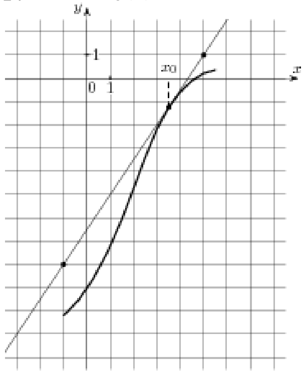
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.31

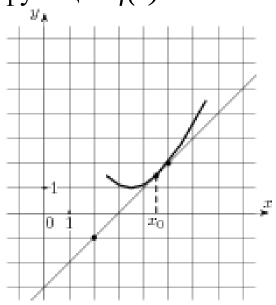
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.32

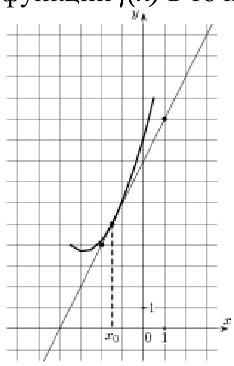
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.33

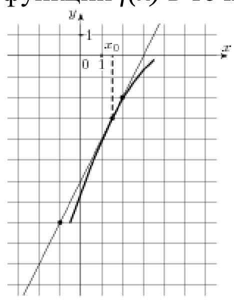
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.34

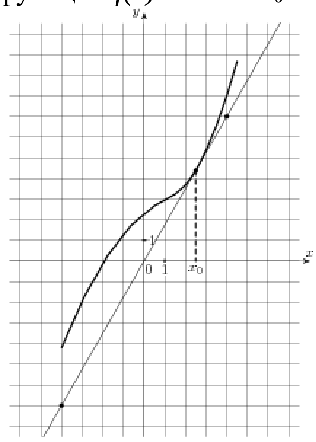
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.35

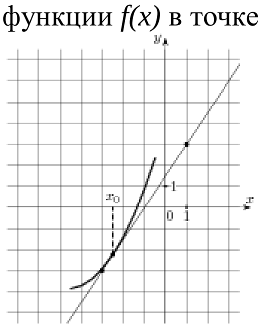
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.36

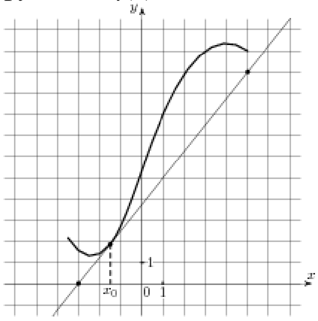
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.37

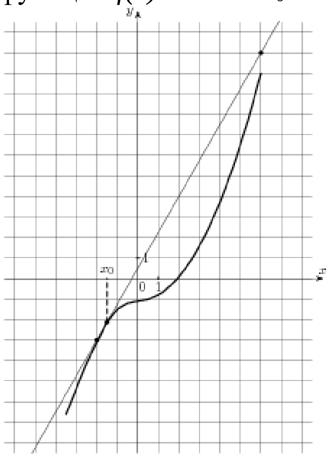
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.38

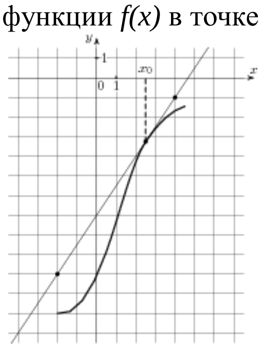
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.39

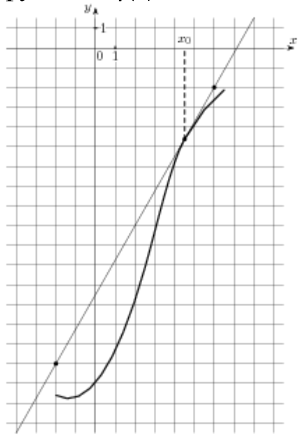
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.40

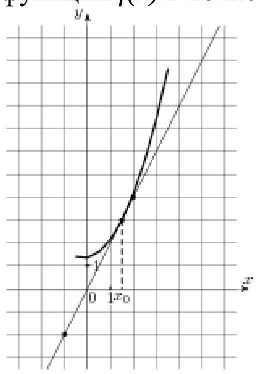
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.41

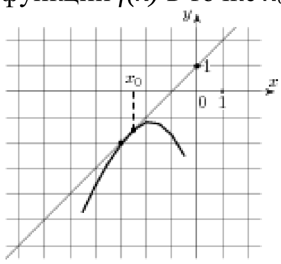
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.42

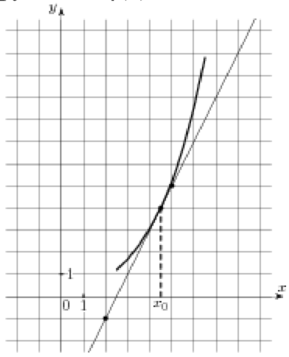
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

1.43

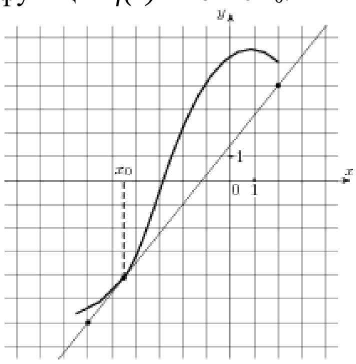
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.44

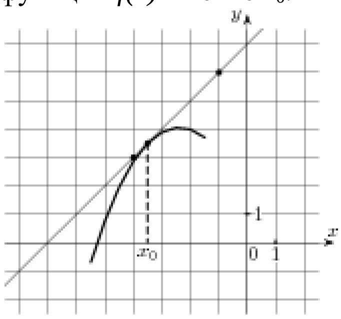
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.45

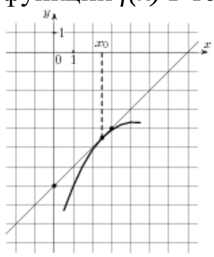
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.46

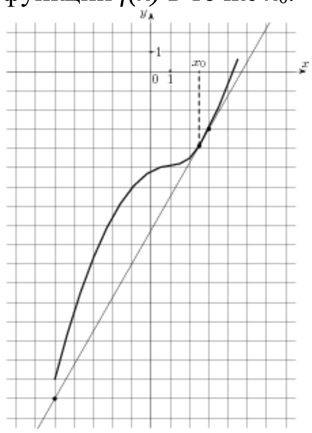
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.47

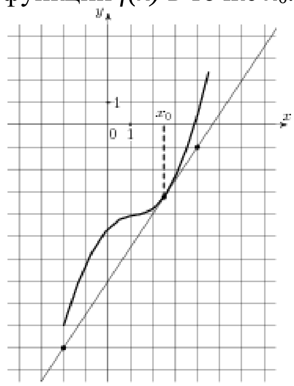
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.48

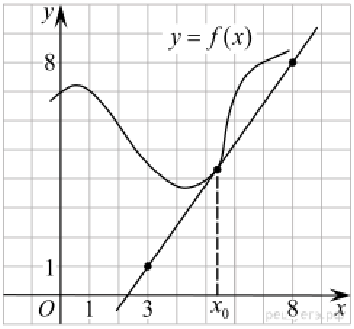
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.49

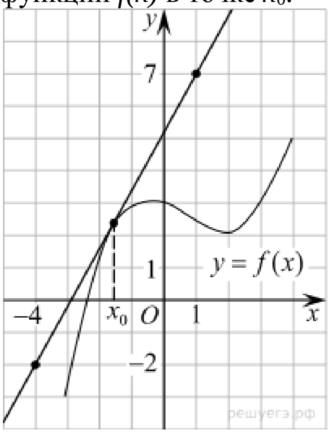
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.50

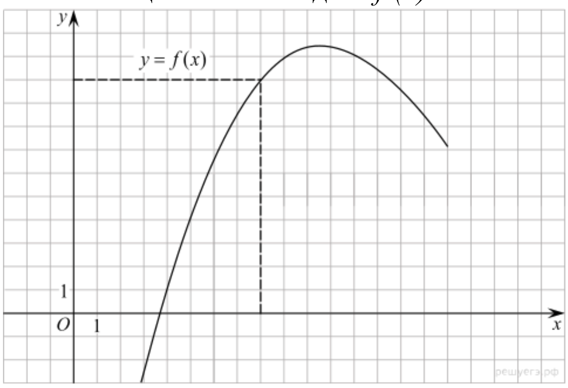
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

1.51

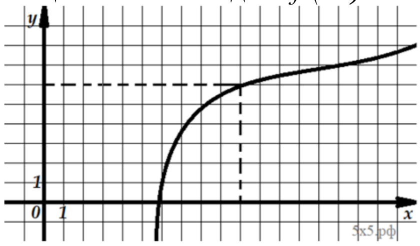
На рисунке изображен график функции *y=f(x)*. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите *f'(8)*.



Ответ:

1.52

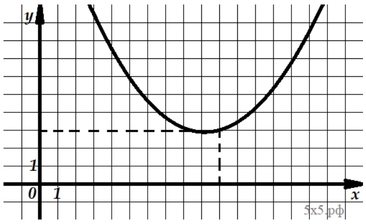
На рисунке изображен график функции *y=f(x)*. Прямая, проходящая через точку (0;3), касается графика этой функции в точке с абсциссой 10. Найдите *f'(10)*.



Ответ:

1.53

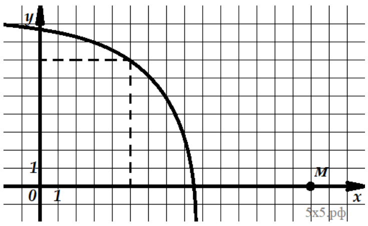
На рисунке изображен график функции *y=f(x)*. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 10. Найдите *f'(10)*.



Ответ:

1.54

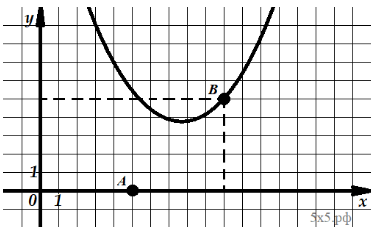
На рисунке изображен график функции *y=f(x)*. Прямая, проходящая через точку ***M***(15;0), касается графика этой функции в точке (5;7). Найдите *f'(5)*.



Ответ:

1.55

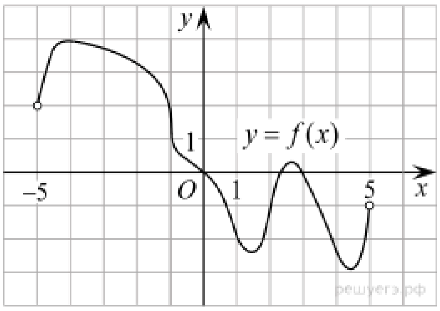
На рисунке изображен график функции *y=f(x)*. Прямая, проходящая через точку ***A***, касается графика этой функции в точке ***B***. Найдите *f'(10)*.



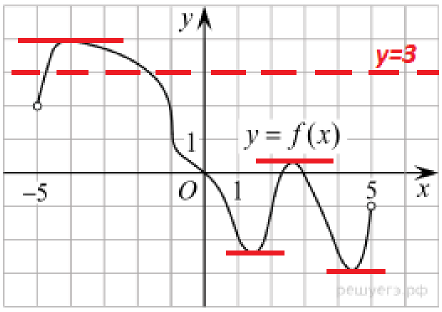
Ответ:

§2. ПРОИЗВОДНАЯ: КОЭФФИЦИЕНТ УГЛА НАКЛОНА

ПРИМЕР 1



а)



б)

На рисунке *а)* изображен график функции $\boldsymbol{y = f(x)}$, определенной на интервале (−5; 5). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $\boldsymbol{y = 3}$ или совпадает с ней.

РЕШЕНИЕ:

Самое главное понять, что именно изображено на рисунке - график функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ *или производной* $\boldsymbol{y = f'(x)}$*! Лучше всего ориентироваться по надписи на самом рисунке!*

Здесь на рисунке написано $\boldsymbol{y = f(x)}$, значит на рисунке изображён график функции.

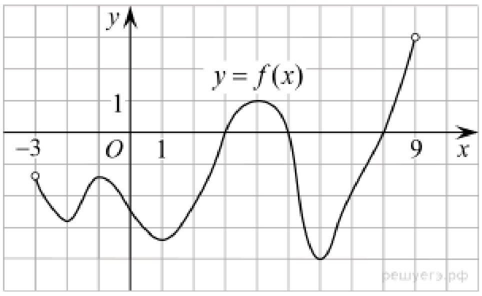
На рисунке *б)* пунктирной линией изображена прямая $y = 3$ (как и любая прямая вида $\boldsymbol{y = n}$ она параллельна оси x). Значит, нам нужно найти те точки, в которых касательная параллельна оси x. Это точки экстремумов и перегибов (в данном случае присутствуют только экстремумы).

Другими словами, поскольку касательная параллельна прямой y = 3 или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны 0. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. У данной функции производная равна нулю только в точках экстремума функции. На заданном интервале функция имеет 2 максимума и 2 минимума, итого 4 экстремума. Таким образом, касательная к графику функции параллельна прямой y = 3 или совпадает с ней в 4 точках.

<u>УПРОЩЕНИЕ:</u> Просто считаем максимумы и минимумы и записываем их количество в ответ.

Ответ: 4

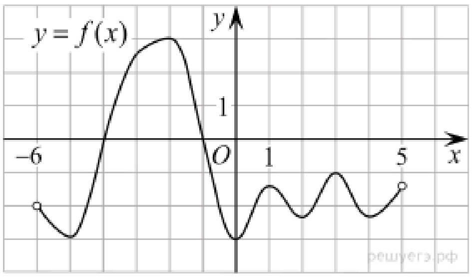
2.1



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−3; 9). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 12$ или совпадает с ней.

Ответ:

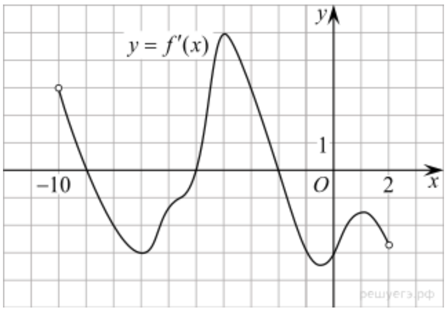
2.2



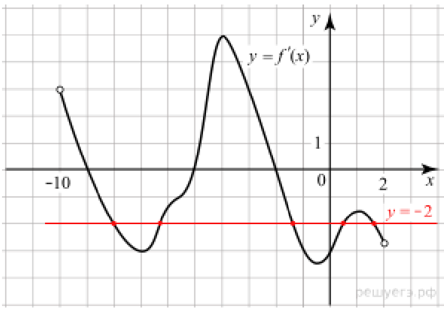
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−6; 5). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.

Ответ:

ПРИМЕР 2



а)



б)

На рисунке изображен график производной функции **f(x)**, определенной на интервале (−10; 2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции **f(x)** параллельна прямой ***y* = −2*x* − *11*** или совпадает с ней.

РЕШЕНИЕ:

Самое главное понять, что именно изображено на рисунке - график функции ***y* = f(*x*)** *или производной* ***y* = f’(*x*)**! *Лучше всего ориентироваться по надписи на самом рисунке!*

Здесь на рисунке написано ***y* = *f’*(*x*)**, значит на рисунке изображён график производной.

Значение производной в точке касания равно угловому ***k*** коэффициенту касательной.

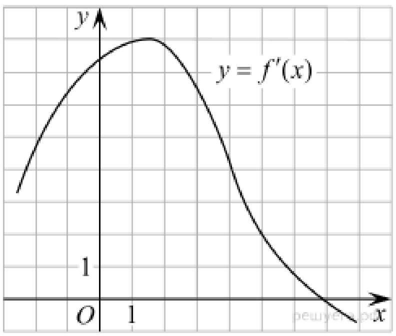
Уравнение касательной имеет вид $y = \boldsymbol{k}x + m$, где ***k*** и есть угловой коэффициент касательной. Коэффициент *m* не имеет особого значения для решения данной задачи.

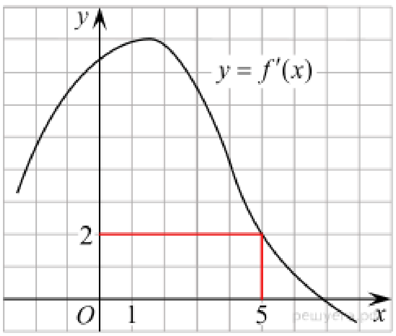
Поскольку касательная параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны **−2**. Найдем количество точек, в которых ***f’*(*x*) = −2**, это соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой **y = −2**. На данном интервале таких точек 5.

<u>УПРОЩЕНИЕ:</u> Рисуем прямую ***y* = *k*.** Число ***k*** берём из уравнения касательной или параллельной ей прямой *y* = ***k****x* + *m*. Считаем точки её пересечения с графиком. В ответ пишем количество точек.

Ответ: 5

ПРИМЕР 3

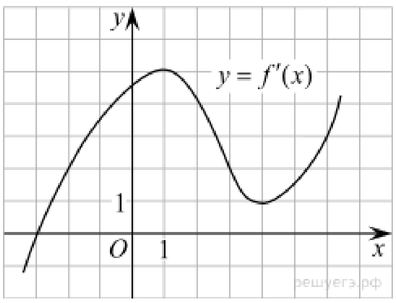


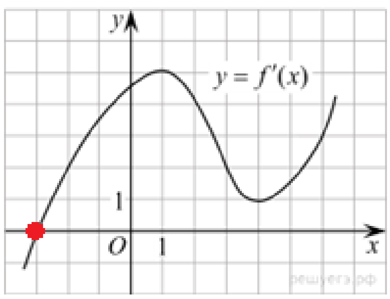


На рисунке изображен график производной функции ***f*(*x*)**. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику ***y* = *f*(*x*)** параллельна прямой ***y* = 2*x*-2** или совпадает с ней.

Ответ: 5

ПРИМЕР 4

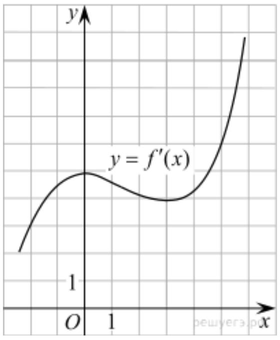




На рисунке изображен график производной функции ***f*(*x*)**. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику ***y* = *f*(*x*)** параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

Ответ: -3

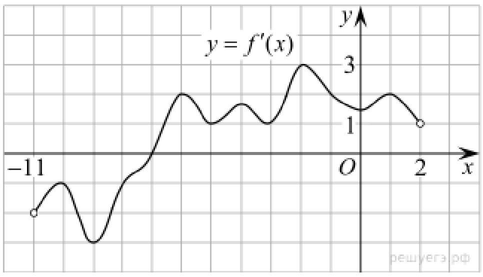
2.3



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6x$ или совпадает с ней.

Ответ:

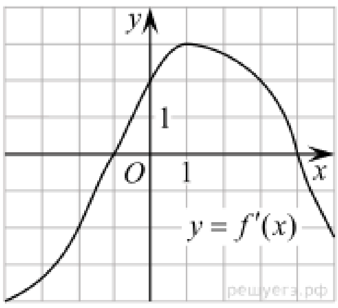
2.4



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на отрезке $(-11;\ 2)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

Ответ:

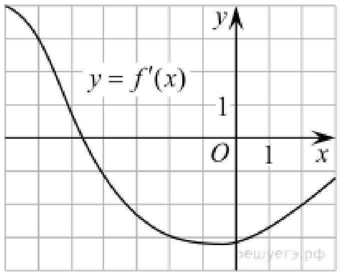
2.5



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 6$ или совпадает с ней.

Ответ:

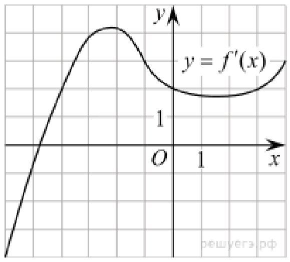
2.6



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 1$ или совпадает с ней.

Ответ:

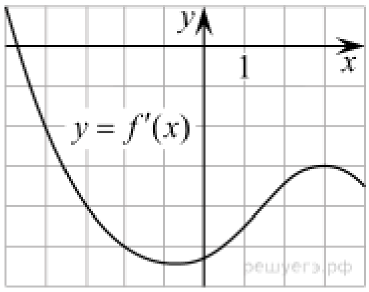
2.7



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите наименьшую абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 8$ или совпадает с ней.

Ответ:

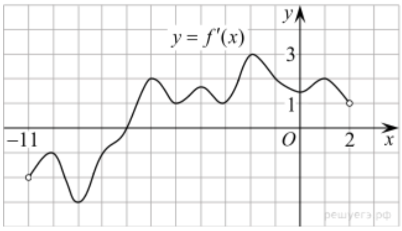
2.8



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите наименьшую абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6 - 4x$ или совпадает с ней.

Ответ:

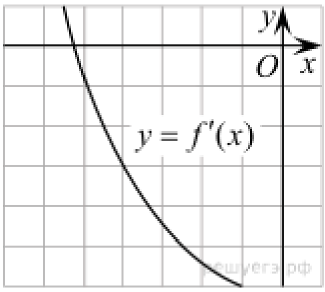
2.9



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на отрезке (−11; 2). Найдите наибольшую абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6 + 2x$ или совпадает с ней.

Ответ:

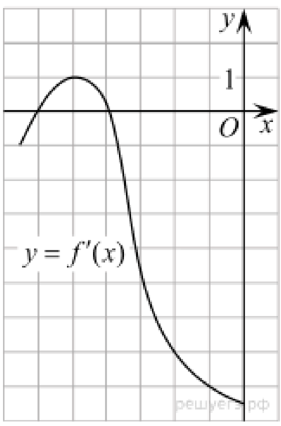
2.10



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -3x - 2$ или совпадает с ней.

Ответ:

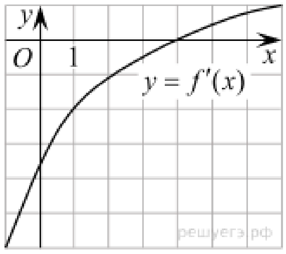
2.11



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 10 - 7x$ или совпадает с ней.

Ответ:

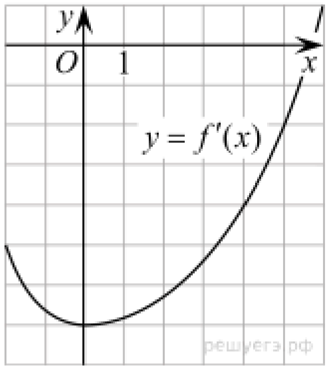
2.12



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6 - 2x$ или совпадает с ней.

Ответ:

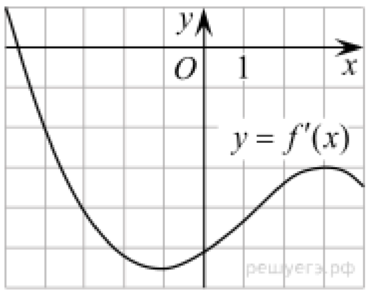
2.13



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -4x - 1$ или совпадает с ней.

Ответ:

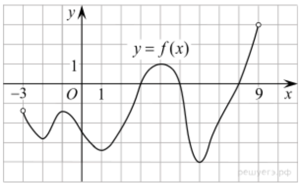
2.14



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6 - 2x$ или совпадает с ней.

Ответ:

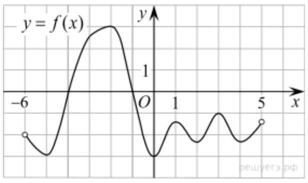
2.15



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3;\ 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 12$ или совпадает с ней.

Ответ:

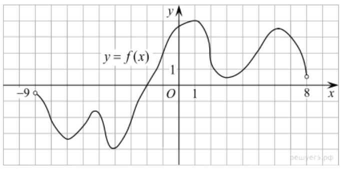
2.16



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;\ 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.

Ответ:

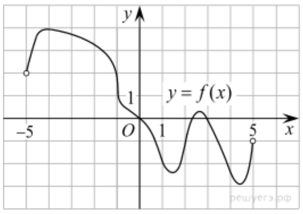
2.17



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 10$.

Ответ:

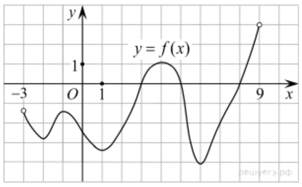
2.18



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$.

Ответ:

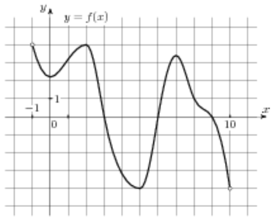
2.19



На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-3;\ 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -2$ или совпадает с ней.

Ответ:

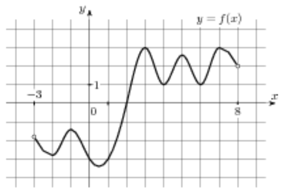
2.20



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1;10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -3$.

Ответ:

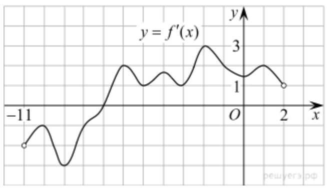
2.21



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3;8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -20$.

Ответ:

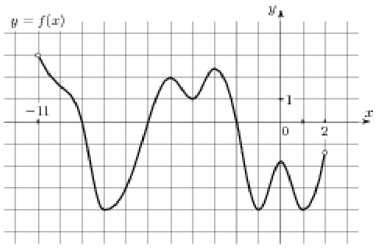
2.22



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на отрезке $(-11;\ 2)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

Ответ:

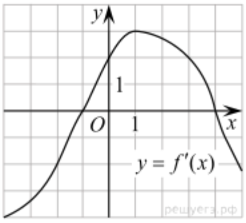
2.23



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-11;2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.

Ответ:

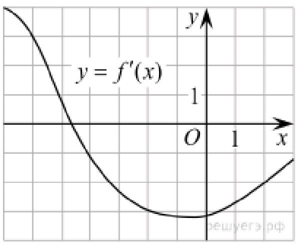
2.24



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 6$ или совпадает с ней.

Ответ:

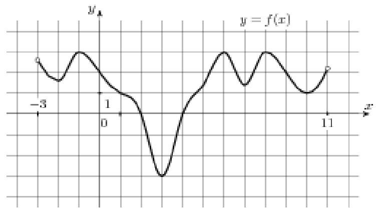
2.25



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 1$ или совпадает с ней.

Ответ:

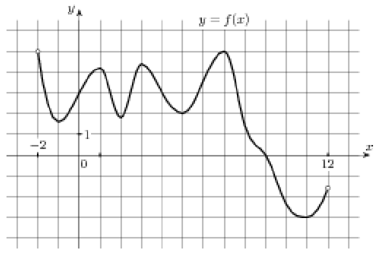
2.26



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-3;11). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -11$.

Ответ:

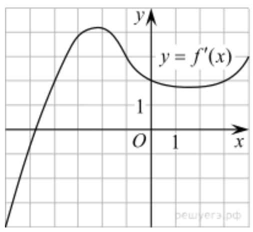
2.27



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-2;12). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 7$.

Ответ:

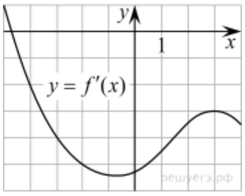
2.28



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите наименьшую абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 8$ или совпадает с ней.

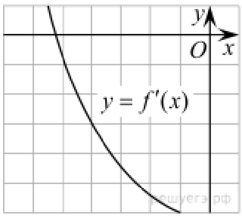
Ответ:

2.29



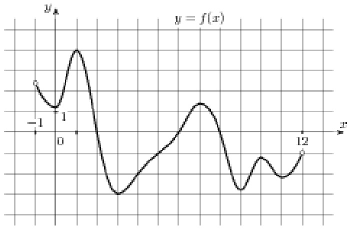
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите наименьшую абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6 - 4x$ или совпадает с ней.
Ответ:

2.30



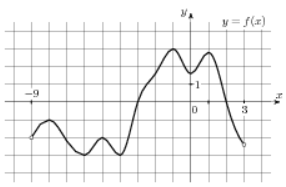
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -3x - 2$ или совпадает с ней.
Ответ:

2.31



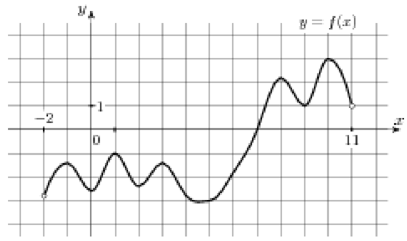
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-1;12). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = -13.
Ответ:

2.32



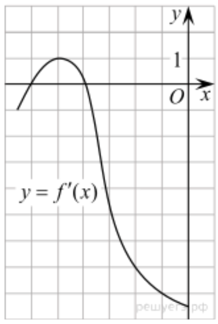
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-9;3). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = 14.
Ответ:

2.33



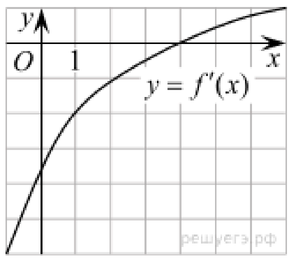
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-2;11). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = 1.
Ответ:

2.34



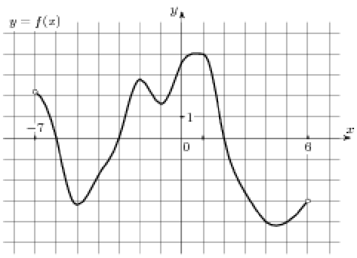
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 10 - 7x$ или совпадает с ней.
Ответ:

2.35



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6 - 2x$ или совпадает с ней.
Ответ:

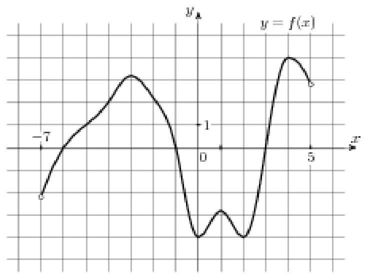
2.36



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-7;6). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 18$.

Ответ:

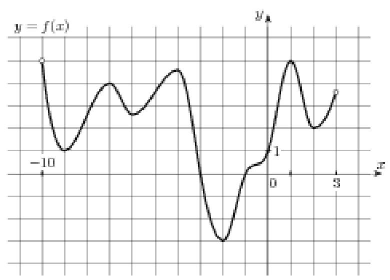
2.37



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-7;5). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -15$.

Ответ:

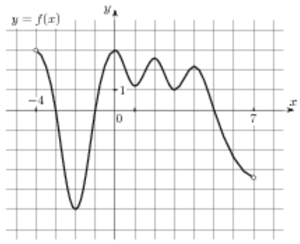
2.38



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-10;3). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -8$.

Ответ:

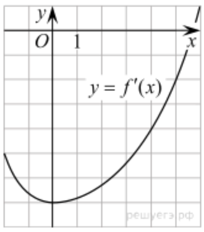
2.39



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-4;7). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -8$.

Ответ:

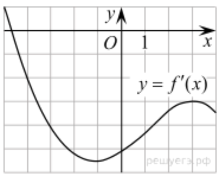
2.40



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -4x - 1$ или совпадает с ней.

Ответ:

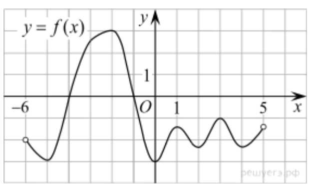
2.41



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6 - 2x$ или совпадает с ней.

Ответ:

2.42



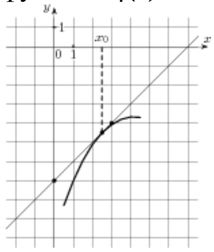
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;\ 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 0$.

Ответ:

ПОВТОРЕНИЕ

1

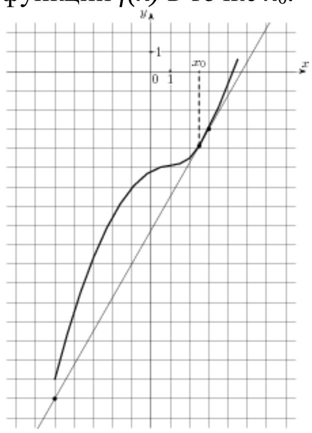
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

2

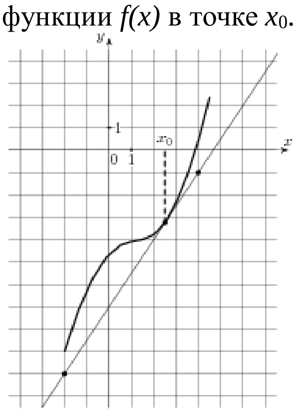
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

3

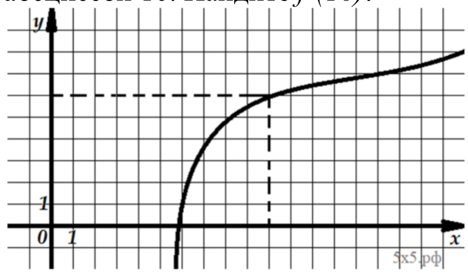
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

4

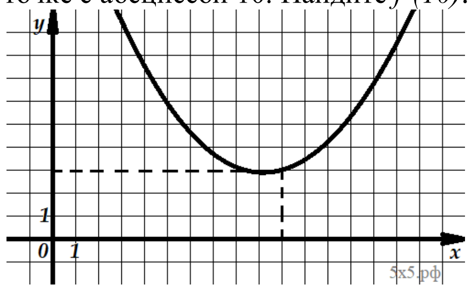
На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Прямая, проходящая через точку (0;3), касается графика этой функции в точке с абсциссой 10. Найдите $f'(10)$.



Ответ:

5

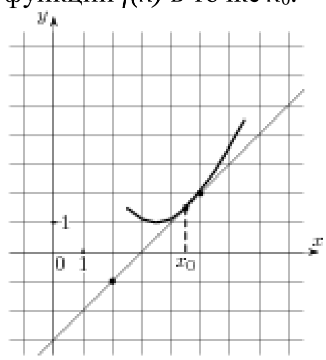
На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 10. Найдите $f'(10)$.



Ответ:

6

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

КАК РЕШАТЬ?

Производную следует находить по формуле: $(x^n)' = nx^{n-1}$

Например, производная функции $y = x^4$ будет $y' = 4x^3$.

Если перед **x** стоит коэффициент (число), то он умножается на производную: $(kx^n)' = knx^{n-1}$

Например, производная функции $y = \frac{x^5}{15}$ будет $y' = \frac{1}{15} \cdot 5x^4 = \frac{5}{15}x^4 = \frac{1}{3}x^4 = \frac{x^4}{3}$,

производная функции $y = 5x^3$ будет $y' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$,

производная функции $y = 9x$ будет $y' = 9$,

производная функции $y = x$ будет $y' = 1$.

Производная константы (обычного числа) равна нулю: $(k)' = 0$.

Например, производная функции $y = 5$ будет $y' = 0$,

производная функции $y = \sqrt{8}$ будет $y' = 0$,

производная функции $y = \pi$ будет $y' = 0$,

производная функции $y = \log_2 5$ будет $y' = 0$.

Производная суммы (разности) это сумма (разность) производных.

Например, производная функции $y = x^7 + 3x^2 - x + \sqrt[3]{4} - \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

будет $y' = 7x^6 + 6x - 1$.

3.1

Найдите производную функции $y = x^3 - 48x + 17$. **РЕШЕНИЕ:** $y' = 3x^2 - 48$

3.2

Найдите производную функции $y = x^3 - 27x$. y'=____________________

3.3

Найдите производную функции $y = x^3 - 3x + 4$. y'=____________________

3.4

Найдите производную функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$. y'=____________________

3.5

Найдите производную функции $y = x^4 - 8x + 1$. y'=____________________

3.6

Найдите производную функции $y = x^5 + 42x + \pi$. y'=____________________

3.7

Найдите производную функции $y = x^3 - 6x - x^2$. y'=____________________

3.8

Найдите производную функции $y = x^3 + 2x^2 + 3$. y'=____________________

3.9

Найдите производную функции $y = x^3 - 20x + \sqrt{7}$. y'=____________________

3.10

Найдите производную функции $y = 1000$. y'=____________________

3.11
Найдите производную функции $y = x^3 - 48x + \log_2 9$. $y'=$________________

3.12
Найдите производную функции $y = x^3 - 5x^2 - 17\sqrt{3}$. $y'=$________________

3.13
Найдите производную функции $y = x^3 + 5x^2 + 7x - 5$. $y'=$________________

3.14
Найдите производную функции $y = x^3 - x^2 - 40x + 3$. $y'=$________________

3.15
Найдите производную функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 4$. $y'=$________________

3.16
Найдите производную функции $y = x^{10} - 9x^9 + 2$. $y'=$________________

3.17
Найдите производную функции $y = 7 + 12x - x^3$. $y'=$________________

3.18
Найдите производную функции $y = \pi - 48x + 17$. $y'=$________________

3.19
Найдите производную функции $y = 0{,}2 + \log_2 9 - 48 + 2\pi$. $y'=$________________

3.20
Найдите производную функции $y = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$. $y'=$________________

3.21
Найдите производную функции $y = 9x^{2,5} - x^3$. $y'=$________________

3.22
Найдите производную функции $y = x^{3,3} - 44x - 10$. $y'=$________________

3.23
Найдите производную функции $y = 11x^3 - 11x^2 - 11x - 11$. $y'=$________________

3.24
Найдите производную функции $y = 3x^{27} + 27x^3 + 81x$. $y'=$________________

3.25
Найдите производную функции $y = 12x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 30x^2 + 60x$. $y'=$________________

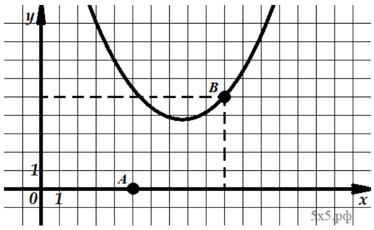
3.26
Найдите производную функции $y = 40x^{2,5} + 10x^{10} + \ln(\pi)$. $y'=$________________

3.27
Найдите производную функции $y = x^{3+\pi} - \pi x + 7$. $y'=$________________

ПОВТОРЕНИЕ

1

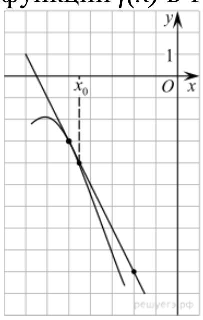
На рисунке изображен график функции *y=f(x)*. Прямая, проходящая через точку ***A***, касается графика этой функции в точке ***B***. Найдите *f'(10)*.



Ответ:

2

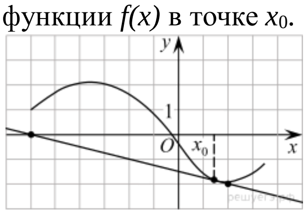
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

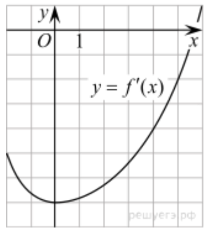
3

На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

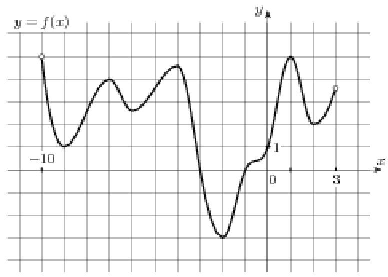
4



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -4x - 1$ или совпадает с ней.

Ответ:

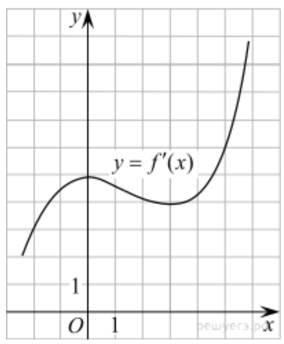
5



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-10;3). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = -8.

Ответ:

6

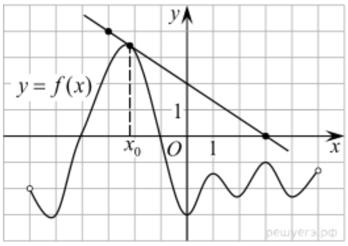


На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6x$ или совпадает с ней.

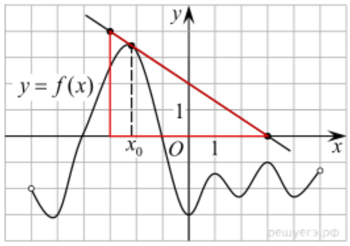
Ответ:

§4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ: НОВАЯ ФУНКЦИЯ

ПРИМЕР 1



а)



б)

На рисунке *а)* изображены график функции ***y* = *f*(*x*)** и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Найдите значение производной функции ***g*(*x*) = 6*f*(*x*) − 3*x*** в точке x_0.

РЕШЕНИЕ:

Сначала найдём производную функции $g(x)$ по обычным правилам нахождения производной функции. На данном этапе (т.к. функция *f(x)* не задана в явном виде) производную *f(x)* просто запишем как *f'(x)*.

Таким образом, имеем: $g'(x) = 6 \cdot f'(x) - 3.$

Затем по рисунку найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. То есть, как всегда, смотрим: функция в этой точке возрастает или убывает. В данном случае убывает, т.к. касательная «направлена вниз» и образует с положительным направлением оси *x* тупой угол. Следовательно, мы уже знаем, что производная будет отрицательной.

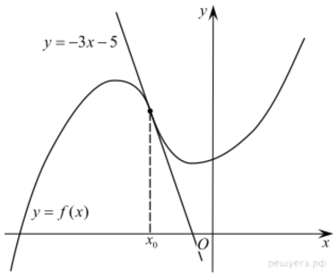
Далее под касательной строим прямоугольный треугольник так, чтобы сама касательная была гипотенузой. Это показано на рис. *б)*. Противолежащий катет делим на прилежащий, добавляем минус (поскольку функция убывает) и получаем, что $f'(x_0) = -\frac{2}{3}.$

Подставляем это значение в нашу основную производную функции $g(x)$ и получаем:

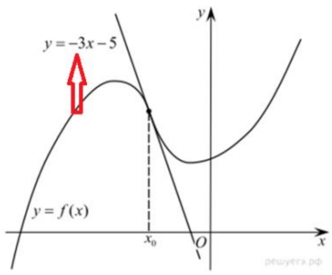
$$g'(x_0) = 6 \cdot f'(x_0) - 3 = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 3 = -7.$$

Ответ: -7

ПРИМЕР 2



а)



б)

На рисунке изображены график функции ***y* = *f*(*x*)** и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = -7f(x) + 21x + \frac{1}{441}$ в точке x_0.

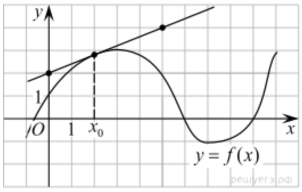
РЕШЕНИЕ:

Решение этого задания очень похоже на решение предыдущего примера. Сначала найдём производную функции $g(x)$: $g'(x) = -7 \cdot f'(x) + 21.$ Затем найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который показан на рис. *б)*. То есть: $f'(x_0) = k = -3.$ Подставляем это значение в производную функции $g(x)$ и получаем:

$$g'(x_0) = -7 \cdot f'(x_0) + 21 = -7 \cdot (-3) + 21 = 42.$$

Ответ: 42

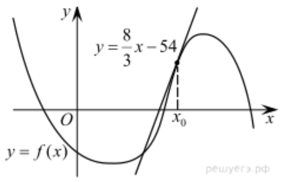
4.1



На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $x_0=2$. Найдите значение производной функции $g(x) = x^2 - f(x) + 1$ в точке x_0.

Ответ:

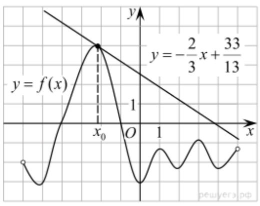
4.2



На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение функции $g(x) = (f'(x) - 0{,}5) \cdot 6$ в точке x_0.

Ответ:

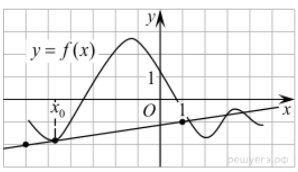
4.3



На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = 12f(x) + \frac{6}{13}$ в точке x_0.

Ответ:

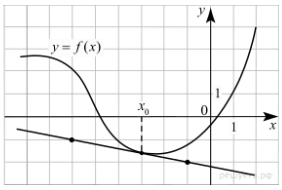
4.4



На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Найдите значение производной функции $g(x) = 9f(x) - \frac{2}{7}x + 7$ в точке x_0.

Ответ:

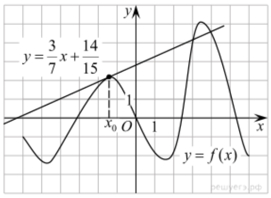
4.5



На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $x_0= -3$. Найдите значение производной функции $g(x) = x^3 + f(x)$ в точке x_0.

Ответ:

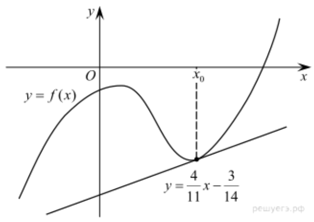
4.6



На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = 3f(x) + \frac{5}{7}x - 4$ в точке x_0.

Ответ:

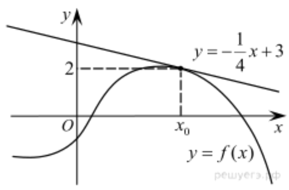
4.7



На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = -5f(x) - \frac{2}{11}x + \ln 3$ в точке x_0.

Ответ:

4.8



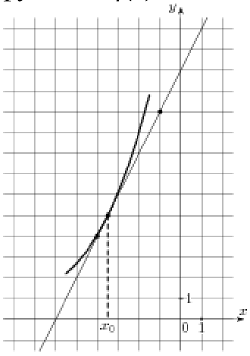
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение функции $g(x) = f'(x) - f(x) + 3$ в точке x_0.

Ответ:

ПОВТОРЕНИЕ

1

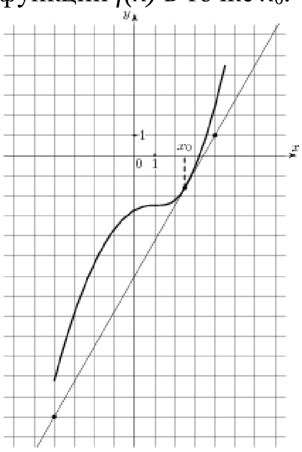
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

2

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

3

Найдите производную: $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 4$.

Ответ:

4

Найдите производную: $y = x^{10} - 9x^9 + 2$.

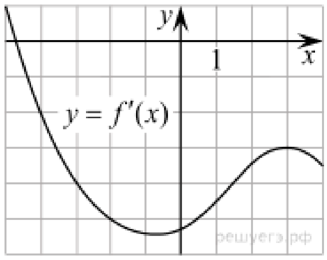
Ответ:

5

Найдите производную: $y = 7 + 12x - x^3$.

Ответ:

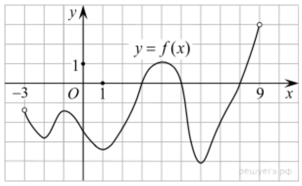
6



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите наименьшую абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6 - 4x$ или совпадает с ней.

Ответ:

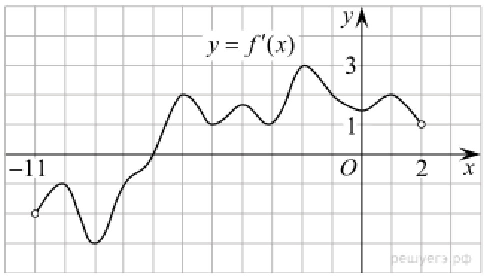
7



На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -2$ или совпадает с ней.

Ответ:

8



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на отрезке $(-11; 2)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

Ответ:

§5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ: ТОЧКА КАСАНИЯ

ПРИМЕР 1

Прямая $y = 3x + 7$ параллельна касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Найдите абсциссу точки касания.

РЕШЕНИЕ:

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 3x + 7$ их угловые коэффициенты равны. В данном случае угловой коэффициент касательной равен 3. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $f'(x) = 3$:

$$(x^2 - 5x + 4)' = 3 \Leftrightarrow 2x - 5 = 3 \Leftrightarrow x = 4.$$

<u>УПРОЩЕНИЕ:</u> Производная функции $f'(x)$ равна производной касательной y'. То есть $f'(x) = y'$. У нас получается уравнение, которое решаем относительно x. Решение этого уравнения и будет ответом к заданию.

Ответ: 4.

5.1

Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

5.2

Прямая $y = 6x + 6$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

5.3

Прямая $y = -3x - 6$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x - 4$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

5.4

Прямая $y = -3x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

5.5

Прямая $y = 3x + 7$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 5x + 4$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

5.6

Прямая $y = 6x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

5.7

Прямая $y = 7x + 11$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

5.8

Прямая $y = 4x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 5x + 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

5.9

Прямая $y = 3x + 6$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 5x + 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

5.10

Прямая $y = 8x + 11$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x + 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

5.11

Прямая $y = -5x + 4$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 3x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

5.12

Прямая $y = 8x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

5.13
Прямая $y=8x+10$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+7x-8$. Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.14
Прямая $y=3x+5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+7x-5$. Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.15
Прямая $y=-4x+11$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+5x-6$. Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.16
Прямая $y=8x+6$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2-3x-6$. Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.17
Прямая $y=-5x+10$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+8x+6$. Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.18
Прямая $y=8x+11$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+7x-7$. Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

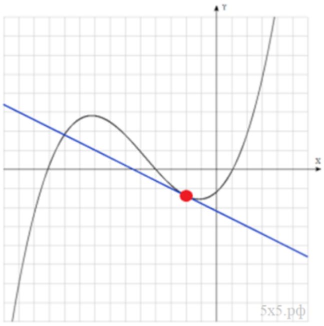
5.19
Прямая $y=8x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+7x+7$. Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.20
Прямая $y=6x+10$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+3x+4$. Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

ПРИМЕР 2

Прямая ***y = -4x - 11*** является касательной к графику функции ***f(x) = x³ + 7x² + 7x - 6***. Найдите абсциссу точки касания.

РЕШЕНИЕ:



а)

В точке касания совпадают значения функции и касательной. Рис. *а)*

В данном случае: $x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11$

Также значение производной в точке касания равно коэффициенту ***k*** касательной. Рис. *а)*

В данном случае: $(x^3 + 7x^2 + 7x - 6)' = -4$

Из этих двух условий формируем систему уравнений и решаем её.

$$\begin{cases} f'(x)=k, \\ f(x)=kx+b. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2+14x+7=-4, \\ x^3+7x^2+7x-6=-4x-11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+14x+11=0, \\ x^3+7x^2+11x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{11}{3}, \\ x=-1, \end{array}\right. \\ x^3+7x^2+11x+5=0\ (*). \end{cases}$$

Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Таким образом, мы нашли ***x***-координату (абсциссу) точки касания. Поэтому искомая абсцисса точки касания -1.

<u>УПРОЩЕНИЕ:</u> Приравниваем касательную и функцию: ***y = f(x)***. Приравниваем их производные: ***y' = f'(x)***. Из этого получается система уравнений. Решаем эту систему. Решение системы и будет ответом к заданию.

Ответ: -1

5.21
Прямая $y=-6x-10$ является касательной к графику функции $y=x^3+4x^2-6x-10$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.22
Прямая $y=-4x-8$ является касательной к графику функции $y=x^3-3x^2-x-9$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.23
Прямая $y=-x+14$ является касательной к графику функции $y=x^3-4x^2+3x+14$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.24
Прямая $y=3x-2$ является касательной к графику функции $y=x^3-5x^2+6x+7$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.25
Прямая $y=8x-9$ является касательной к графику функции $y=x^3+x^2+8x-9$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.26
Прямая $y=-2x+6$ является касательной к графику функции $y=x^3-3x^2+x+5$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.27
Прямая $y=2x+5$ является касательной к графику функции $y=x^3-4x^2+6x+5$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.28
Прямая $y=-6x+15$ является касательной к графику функции $y=x^3+9x^2+9x-10$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.29
Прямая $y=3x+9$ является касательной к графику функции $y=x^3+x^2+2x+8$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.30
Прямая $y=3x+4$ является касательной к графику функции $y=x^3+4x^2+3x+4$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.31
Прямая $y=6x+4$ является касательной к графику функции $y=x^3-3x^2+9x+3$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.32
Прямая $y=3x+11$ является касательной к графику функции $y=x^3-3x^2-6x+6$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.33
Прямая $y=3x+3$ является касательной к графику функции $y=x^3-2x^2+3x+3$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.34
Прямая $y=x+9$ является касательной к графику функции $y=x^3-3x^2+4x+8$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.35
Прямая $y=-5x+14$ является касательной к графику функции $y=x^3+3x^2-2x+15$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.36
Прямая $y=-6x-2$ является касательной к графику функции $y=x^3-5x^2+x-5$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

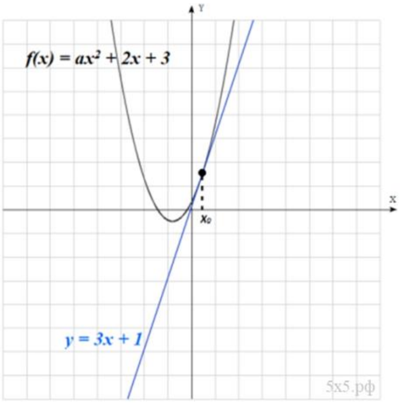
5.37
Прямая $y=7x+9$ является касательной к графику функции $y=x^3-2x^2+8x+9$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

5.38
Прямая $y=3x-8$ является касательной к графику функции $y=x^3-3x^2+6x-9$.
Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

ПРИМЕР 3

Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.

РЕШЕНИЕ:



а)

Пусть касание происходит в какой-то точке x_0. Мы пока не знаем где она. Рис. *а)*

В точке касания x_0 совпадают значения функции и касательной. Рис. *а)*

В данном случае: $ax^2 + 2x + 3 = 3x + 1$

Также значение производной в точке касания x_0 равно коэффициенту k касательной. Рис. *а)*

В данном случае: $(ax^2 + 2x + 3)' = 3$

Здесь следует помнить, что a - это просто коэффициент (обычное число). Значит, производная от этой функции будет вычисляться так: $(ax^2 + 2x + 3)' = 2ax + 2$.

Из этих двух условий формируем систему уравнений и решаем её, заменив x на x_0.

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2 = 3, \\ ax_0^2 + 2x_0 + 3 = 3x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 = 0,5, \\ 0,5x_0 - x_0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,125, \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

Мы решили систему уравнений относительно двух переменных: a и x_0. Таким образом, мы выяснили, что касание произошло в точке $x_0 = 4$, а искомое значение коэффициента $a = 0{,}125$.

<u>УПРОЩЕНИЕ:</u> Приравниваем касательную и функцию: $y = f(x)$. Приравниваем их производные: $y' = f'(x)$. Из этого получается система уравнений. Решаем эту систему относительно двух переменных: a и x. Получившееся значение a и будет ответом к заданию.

Ответ: 0,125

5.39

Прямая $y = -3x - 8$ является касательной к графику функции $ax^2 + 27x + 7$. Найдите a.

Ответ:

5.40

Прямая $y = 4x + 4$ является касательной к графику $y = ax^2 + 24x + 8$. Найдите a.

Ответ:

5.41

Прямая $y = -9x + 5$ является касательной к графику $f(x) = ax^2 + 15x + 11$. Найдите a.

Ответ:

5.42

Прямая $y = x + 7$ является касательной к графику функции $ax^2 - 15x + 15$. Найдите a.

Ответ:

5.43

Прямая $y = 9x - 7$ является касательной к графику функции $ax^2 + 21x - 4$. Найдите a.

Ответ:

5.44

Прямая $y = 4x - 2$ является касательной к графику функции $ax^2 + 28x + 14$. Найдите a.

Ответ:

5.45

Прямая $y = 9x + 9$ является касательной к графику функции $ax^2 - 9x + 12$. Найдите a.

Ответ:

5.46

Прямая $y = 6x + 4$ является касательной к графику функции $ax^2 + 30x + 28$. Найдите a.

Ответ:

5.47
Прямая $y=-3x-8$ является касательной к графику функции $ax^2+9x+10$. Найдите ***a***.
Ответ:

5.48
Прямая $y=-6x+7$ является касательной к графику функции ax^2-2x+8. Найдите ***a***.
Ответ:

5.49
Прямая $y=8x-9$ является касательной к графику функции ax^2+6x-8. Найдите ***a***.
Ответ:

5.50
Прямая $y=4x+9$ является касательной к графику функции $ax^2+32x+23$. Найдите ***a***.
Ответ:

5.51
Прямая $y=-4x+1$ является касательной к графику функции $ax^2+20x+25$. Найдите ***a***.
Ответ:

5.52
Прямая $y=-7x-9$ является касательной к графику функции ax^2-x-6. Найдите ***a***.
Ответ:

5.53
Прямая $y=-7x$ является касательной к графику функции $ax^2-11x+2$. Найдите ***a***.
Ответ:

5.54
Прямая $y=7x+8$ является касательной к графику функции $ax^2+13x+11$. Найдите ***a***.
Ответ:

5.55
Прямая $y=-5x-1$ является касательной к графику функции $ax^2-35x+8$. Найдите ***a***.
Ответ:

5.56
Прямая $y=-8x+8$ является касательной к графику функции $ax^2-38x+17$. Найдите ***a***.
Ответ:

5.57
Прямая $y=3x-5$ является касательной к графику функции $ax^2-27x+10$. Найдите ***a***.
Ответ:

5.58
Прямая $y=-9x-4$ является касательной к графику функции ax^2-25x. Найдите ***a***.
Ответ:

5.59
Прямая $y=-6x+9$ является касательной к графику функции $ax^2-24x+12$. Найдите ***a***.
Ответ:

5.60
Прямая $y=-x+4$ является касательной к графику функции $ax^2+29x+29$. Найдите ***a***.
Ответ:

5.61
Прямая $y=-x-9$ является касательной к графику функции ax^2+3x-8. Найдите ***a***.
Ответ:

5.62
Прямая $y=-4x+4$ является касательной к графику функции $ax^2+24x+32$. Найдите ***a***.
Ответ:

5.63
Прямая $y=2x+6$ является касательной к графику функции $ax^2+22x+31$. Найдите ***a***.
Ответ:

5.64
Прямая $y=-9x+2$ является касательной к графику функции $ax^2+11x+6$. Найдите ***a***.
Ответ:

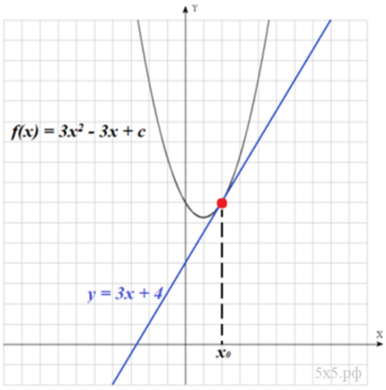
5.65
Прямая $y=-3x-2$ является касательной к графику функции $ax^2+21x+22$. Найдите ***a***.
Ответ:

5.66
Прямая $y=-3x+8$ является касательной к графику функции $ax^2+21x+16$. Найдите ***a***.
Ответ:

ПРИМЕР 4

Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $f(x) = 3x^2 - 3x + c$. Найдите c.

РЕШЕНИЕ:



а)

Пусть касание происходит в какой-то точке x_0. Мы пока не знаем где она. Рис. *а)*

В точке касания x_0 совпадают значения функции и касательной. Рис. *а)*

В данном случае: $3x^2 - 3x + c = 3x + 4$

Также значение производной в точке касания x_0 равно коэффициенту k касательной. Рис. *а)*

В данном случае: $(3x^2 - 3x + c)' = 3$

Здесь следует помнить, что c - это просто коэффициент (обычное число), и производная от него равна нулю, а производная всей этой функции будет вычисляться так: $(3x^2 - 3x + c)' = 6x - 3$.

Из этих двух условий формируем систему уравнений и решаем её.

$$\begin{cases} 6x - 3 = 3, \\ 3x^2 - 3x + c = 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 3x^2 - 6x + c - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ c = 7. \end{cases}$$

Мы решили систему уравнений относительно двух переменных: c и x. Таким образом, мы выяснили, что касание произошло в точке $x_0 = 1$, а искомое значение коэффициента $c = 7$.

УПРОЩЕНИЕ: Приравниваем касательную и функцию: $y = f(x)$. Приравниваем их производные: $y' = f'(x)$. Из этого получается система уравнений. Решаем эту систему относительно двух переменных: c и x. Получившееся значение c и будет ответом к заданию.

Ответ: 7

5.67

Прямая $y = 5x - 8$ является касательной к графику функции $y = 4x^2 - 15x + c$. Найдите c.

Ответ:

5.68

Прямая $y = 5x + 5$ является касательной к графику функции $8x^2 + 29x + c$. Найдите c.

Ответ:

5.69

Прямая $y = 4x + 6$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 + 16x + c$. Найдите c.

Ответ:

5.70

Прямая $y = 5x + 1$ является касательной к графику функции $y = x^2 + 13x + c$. Найдите c.

Ответ:

5.71

Прямая $y = -3x + 7$ является касательной к графику функции $18x^2 - 15x + c$. Найдите c.

Ответ:

5.72

Прямая $y = -x + 3$ является касательной к графику функции $6x^2 - 13x + c$. Найдите c.

Ответ:

5.73

Прямая $y = -6x - 2$ является касательной к графику функции $18x^2 + 6x + c$. Найдите c.

Ответ:

5.74

Прямая $y = -5x + 6$ является касательной к графику функции $28x^2 + 23x + c$. Найдите c.

Ответ:

5.75
Прямая $y=2x+2$ является касательной к графику функции x^2-4x+c. Найдите *c*.
Ответ:

5.76
Прямая $y=-x-3$ является касательной к графику функции $25x^2+9x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.77
Прямая $y=-7x-4$ является касательной к графику функции x^2-1x+c. Найдите *c*.
Ответ:

5.78
Прямая $y=-9x+2$ является касательной к графику функции $16x^2+7x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.79
Прямая $y=-8x-2$ является касательной к графику функции $24x^2-32x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.80
Прямая $y=5x-2$ является касательной к графику функции x^2+1x+c. Найдите *c*.
Ответ:

5.81
Прямая $y=-5x$ является касательной к графику функции $18x^2-29x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.82
Прямая $y=-5x+2$ является касательной к графику функции $8x^2+11x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.83
Прямая $y=4x+6$ является касательной к графику функции $2x^2+16x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.84
Прямая $y=-9x-5$ является касательной к графику функции $8x^2-17x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.85
Прямая $y=-4x-9$ является касательной к графику функции $13x^2-30x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.86
Прямая $y=x+3$ является касательной к графику функции $2x^2+9x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.87
Прямая $y=x+4$ является касательной к графику функции $20x^2+21x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.88
Прямая $y=6x+5$ является касательной к графику функции $18x^2-18x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.89
Прямая $y=-4x-8$ является касательной к графику функции $9x^2-16x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.90
Прямая $y=-6x-7$ является касательной к графику функции $2x^2-10x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.91
Прямая $y=2x+3$ является касательной к графику функции $8x^2-6x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.92
Прямая $y=5x-6$ является касательной к графику функции $7x^2-23x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

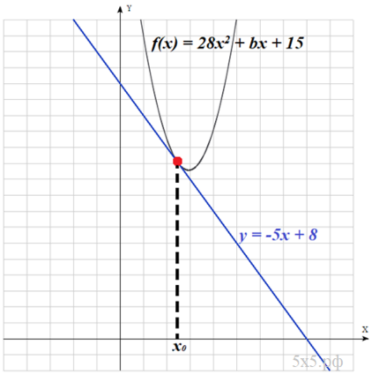
5.93
Прямая $y=-6x+9$ является касательной к графику функции $15x^2+24x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

5.94
Прямая $y=3x-9$ является касательной к графику функции $18x^2+27x+c$. Найдите *c*.
Ответ:

ПРИМЕР 5

Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $f(x) = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

РЕШЕНИЕ:



а)

Пусть касание происходит в какой-то точке x_0. Мы пока не знаем где она. Рис. *а)*

В точке касания x_0 совпадают значения функции и касательной. Рис. *а)*

В данном случае: $28x^2 + bx + 15 = -5x + 8$

Также значение производной в точке касания x_0 равно коэффициенту k касательной. Рис. *а)*

В данном случае: $(28x^2 + bx + 15)' = -5$

Здесь следует помнить, что b - это просто коэффициент (обычное число). Значит, производная этой функции будет вычисляться так: $(28x^2 + bx + 15)' = 56x + b$.

Из этих двух условий формируем систему уравнений и решаем её.

$$\begin{cases} 56x + b = -5, \\ 28x^2 + bx + 15 = -5x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 - 56x, \\ 28x^2 + (-5 - 56x)x + 15 = -5x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 - 56x, \\ x^2 = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

По условию абсцисса точки касания положительна, поэтому $x = 0{,}5$, откуда $b = -33$.

Мы решили систему уравнений относительно двух переменных: b и x. Таким образом, мы выяснили, что касание произошло в точке $x_0 = 0{,}5$, а искомое значение коэффициента $b = -33$.

<u>УПРОЩЕНИЕ:</u> Приравниваем касательную и функцию: $y = f(x)$. Приравниваем их производные: $y' = f'(x)$. Из этого получается система уравнений. Решаем эту систему относительно двух переменных: b и x. Получившееся значение b и будет ответом к заданию.

Ответ: -33

5.95

Прямая $y = 9x + 5$ является касательной к графику функции $18x^2 + bx + 7$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

Ответ:

5.96

Прямая $y = -7x - 5$ является касательной к графику функции $28x^2 + bx + 2$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Ответ:

5.97

Прямая $y = -5x - 7$ является касательной к графику функции $8x^2 + bx + 11$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Ответ:

5.98

Прямая $y = 5x - 8$ является касательной к графику функции $6x^2 + bx + 16$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Ответ:

5.99

Прямая $y = 8x + 3$ является касательной к графику функции $15x^2 + bx + 18$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

Ответ:

5.100

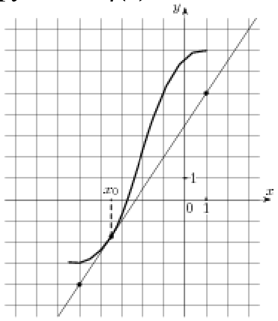
Прямая $y = 2x + 8$ является касательной к графику функции $9x^2 + bx + 24$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Ответ:

ПОВТОРЕНИЕ

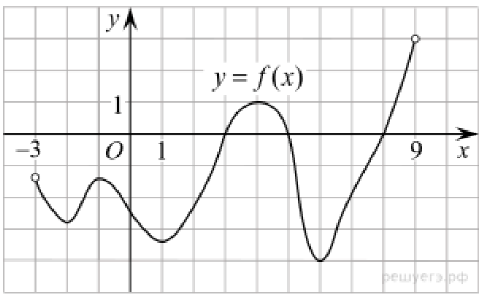
1

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:

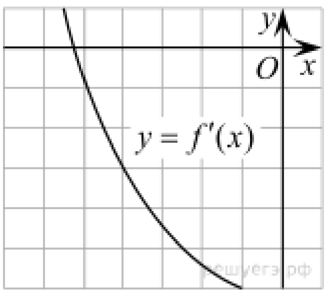
2



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3;\ 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 12$ или совпадает с ней.

Ответ:

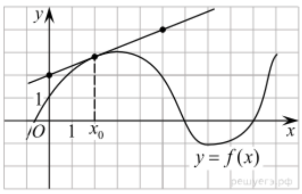
3



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -3x - 2$ или совпадает с ней.

Ответ:

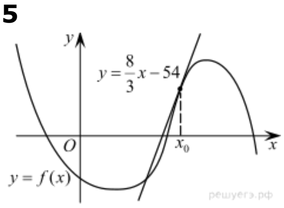
4



На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $x_0=2$. Найдите значение производной функции $g(x) = x^2 - f(x) + 1$ в точке x_0.

Ответ:

5



На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение функции $g(x) = \left(f'(x) - 0,5\right) \cdot 6$ в точке x_0.

Ответ:

6

Найдите производную: $y = x^{3,7} - 44x - 10$.

Ответ:

7

Найдите производную: $y = 11x^3 - 11x^2 + 11x$.

Ответ:

8

Найдите производную: $y = \pi - 70x + 17$.

Ответ:

9

Найдите производную: $y = \log_2 9 - 48 + 2\pi$.

Ответ:

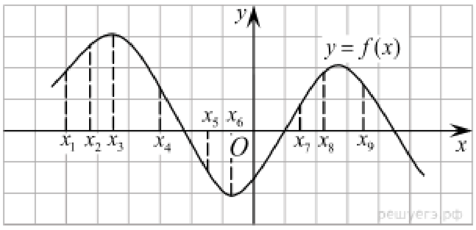
10

Найдите производную: $y = x^6 + x^4 + x^2 + x$.

Ответ:

§6. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

ПРИМЕР 1



На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, x_3, ..., x_9$. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество найденных точек.

РЕШЕНИЕ:

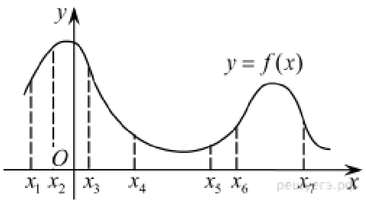
Главное - определить, что именно изображено на рисунке: график функции $y = f(x)$ *или график производной* $y = f'(x)$. *Ориентироваться лучше всего по записи на самом рисунке!*

В данном случае на рисунке изображён график **функции**. Когда функция возрастает, производная положительна. Когда функция убывает, производная отрицательна. В точках экстремума производная равна нулю. Здесь функция возрастает в точках x_1, x_2, x_7 и x_8. Значит, в этих четырёх точках производная положительна. Функция убывает в точках x_4, x_5 и x_9. Значит, в этих трёх точках производная отрицательна. В точке x_3 максимум функции, а в точке x_6 минимум. Значит, в этих двух точках производная равна нулю. Нам нужно количество точек, в которых производная отрицательна. Таких точек три.

УПРОЩЕНИЕ: Просто считаем точки, в которых функция убывает.

Ответ: 3

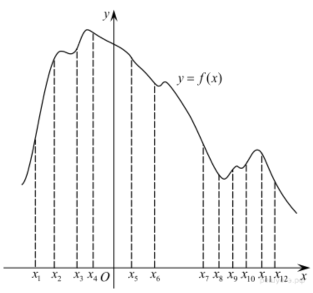
6.1



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

Ответ:

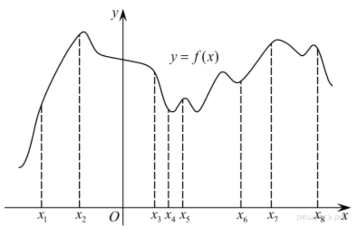
6.2



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \ldots x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

Ответ:

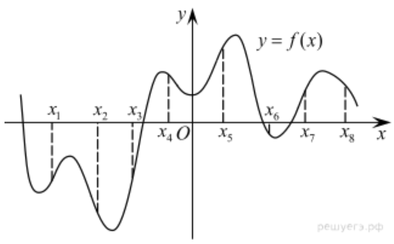
6.3



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \ldots x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

Ответ:

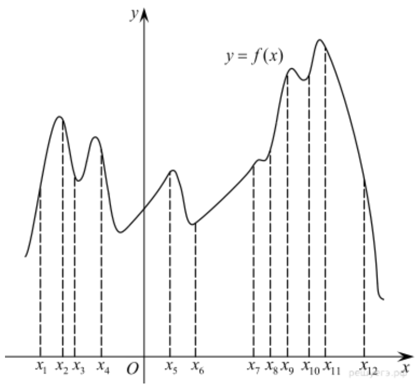
6.4



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

Ответ:

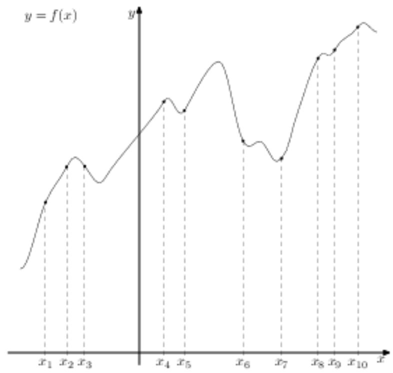
6.5



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

Ответ:

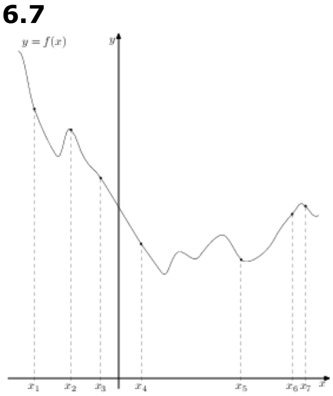
6.6



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

Ответ:

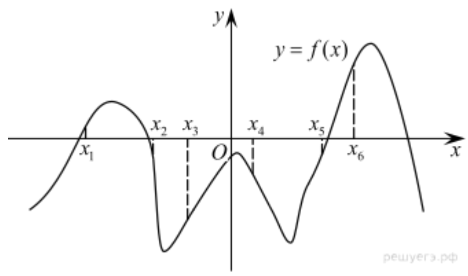
6.7



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

Ответ:

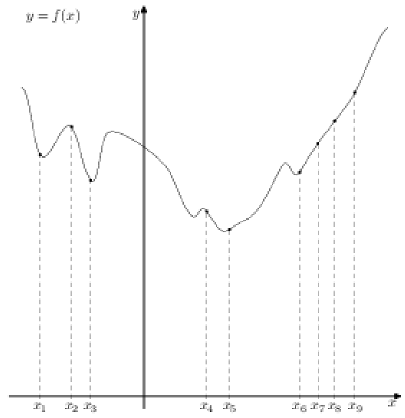
6.8



На рисунке изображён график функции и шесть точек на оси абсцисс. В скольких из этих точек производная функции отрицательна?

Ответ:

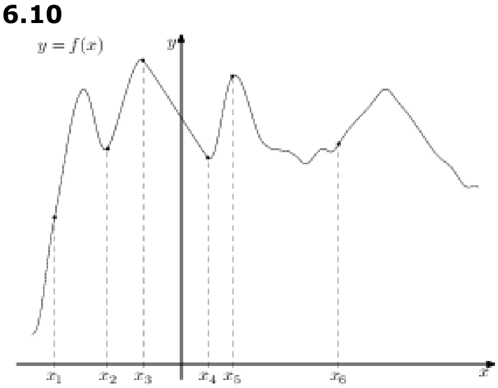
6.9



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

Ответ:

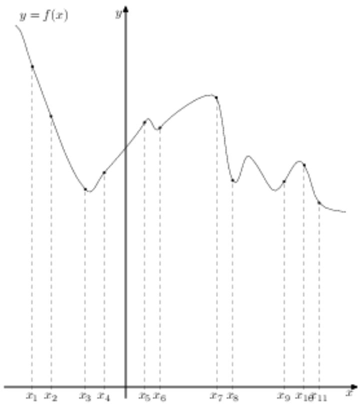
6.10



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots x_6$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

Ответ:

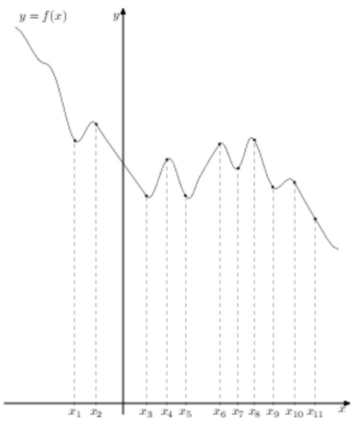
6.11



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и одиннадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots x_{11}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

Ответ:

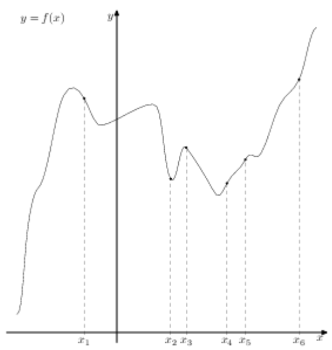
6.12



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и одиннадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots x_{11}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

Ответ:

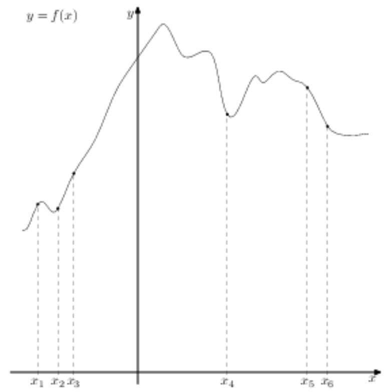
6.13



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots x_6$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

Ответ:

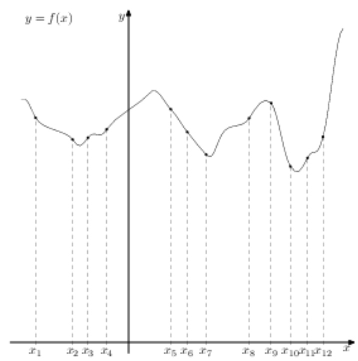
6.14



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots x_6$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

Ответ:

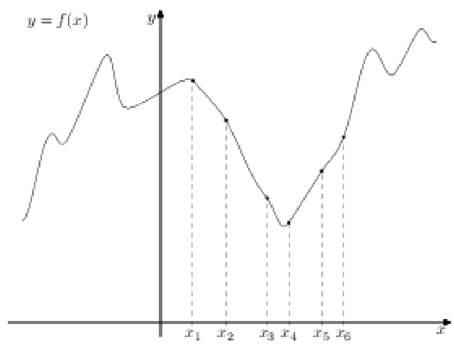
6.15



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

Ответ:

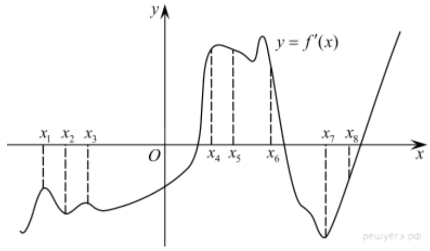
6.16



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots x_6$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

Ответ:

ПРИМЕР 2



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ - производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?

РЕШЕНИЕ:

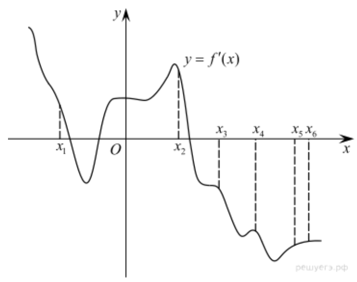
Главное - определить, что именно изображено на рисунке: график функции $y = f(x)$ *или график производной* $y = f'(x)$. *Ориентироваться лучше всего по записи на самом рисунке!*

В данном случае на рисунке изображён график **производной** функции. Когда функция возрастает, производная положительна. Когда функция убывает, производная отрицательна. В точках экстремума производная равна нулю. Здесь производная положительна в точках x_4, x_5, и x_6. Значит, в этих трёх точках функция возрастает. Производная отрицательна в точках x_1, x_2, x_3, x_7, и x_8. Значит, в этих пяти точках функция убывает. Нам нужно количество точек, в которых функция возрастает. Таких точек три.

УПРОЩЕНИЕ: Просто считаем точки, в которых производная положительна (точки над осью x) для промежутков возрастания функции. Или точки, в которых производная отрицательна (точки под осью x) для промежутков убывания функции.

Ответ: 3

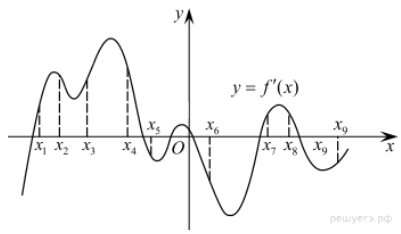
6.17



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ на оси абсцисс отмечены шесть точек: $x_1, x_2, \ldots x_6$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?

Ответ:

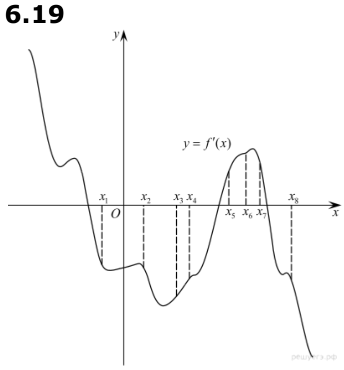
6.18



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ на оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, \ldots x_9$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?

Ответ:

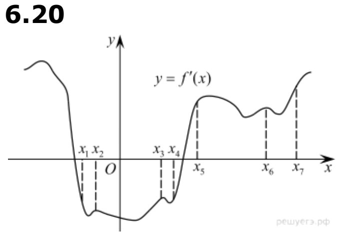
6.19



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \ldots x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?

Ответ:

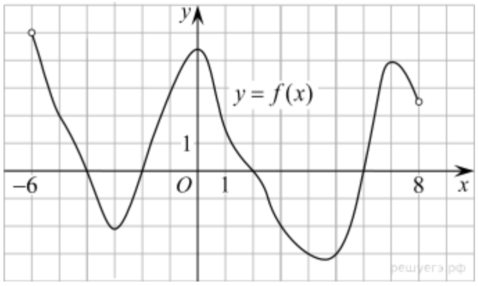
6.20



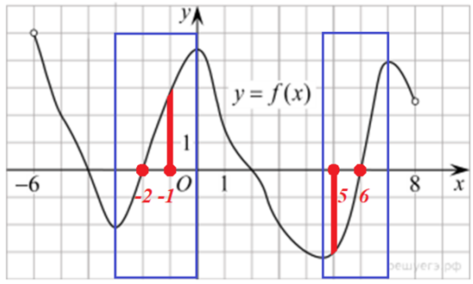
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ на оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, \ldots x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?

Ответ:

ПРИМЕР 3



а)



б)

На рисунке *а)* изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−6; 8). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

РЕШЕНИЕ:

Главное - определить, что именно изображено на рисунке: график функции $y = f(x)$ *или график производной* $y = f'(x)$. *Ориентироваться лучше всего по записи на самом рисунке!*

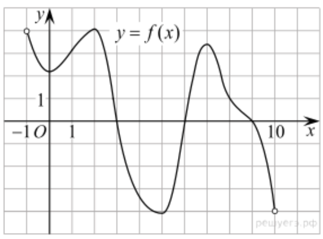
В данном случае на рисунке изображён график **функции**. Когда функция возрастает, производная положительна. Когда функция убывает, производная отрицательна. В точках экстремума производная равна нулю. Здесь функция возрастает на промежутках [-3; 0] и [~4,8; 7], однако сами точки **-3; 0** и **7** являются экстремумами функции и производная в этих точках равна нулю. Значит, на промежутках (-3; 0) и (~4,8; 7) производная положительна. На рис. *б)* показано, что в промежуток (-3; 0) входят два целых значения: **-2** и **-1**. В промежуток (~4,8; 7) также входят два целых значения: **5** и **6**. Всего целых точек, которые входят в эти промежутки, четыре.

Иногда просят указать сумму этих точек - тогда просто складываем эти значения, и результат записываем в ответ.

УПРОЩЕНИЕ: Просто считаем целые точки, в которых функция возрастает, если речь идёт о положительной производной; или точки, в которых функция убывает, если речь идёт об отрицательной производной.

Ответ: 4

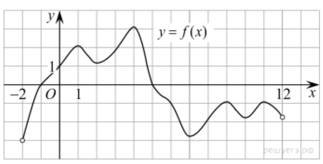
6.21



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-1; 10). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Ответ:

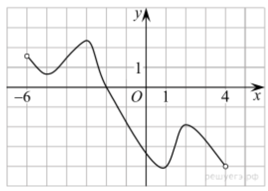
6.22



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−2; 12). Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

Ответ:

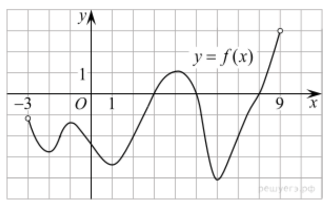
6.23



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−6; 4). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

Ответ:

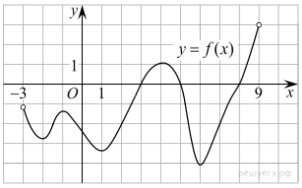
6.24

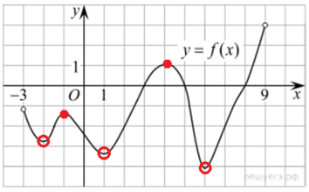


На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−3; 9). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

Ответ:

ПРИМЕР 4

а)


б)


На рисунке *а)* изображен график функции ***y* = *f*(*x*)**, определенной на интервале (−3; 9). Найдите количество точек, в которых производная функции ***f*(*x*)** равна 0.

РЕШЕНИЕ:

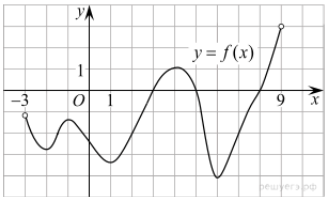
Главное - определить, что именно изображено на рисунке: график функции ***y = f(x)*** *или график производной* ***y = f'(x)****. Ориентироваться лучше всего по записи на самом рисунке!*

Здесь на рисунке изображён график **функции**. Когда функция возрастает, производная положительна. Когда функция убывает, производная отрицательна. В точках экстремума производная равна нулю. Здесь всего пять экстремумов - 2 максимума и 3 минимума. Рис *б)*.

УПРОЩЕНИЕ: Просто считаем холмики и ямки.

Ответ: 5

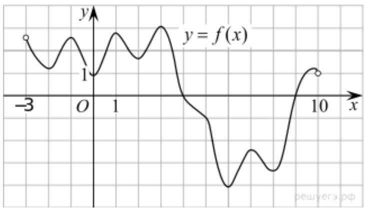
6.25



На рисунке изображен график функции ***y* = *f*(*x*)**, определенной на интервале (−3; 9). Найдите количество точек, в которых производная функции ***f*(*x*)** равна 0.

Ответ:

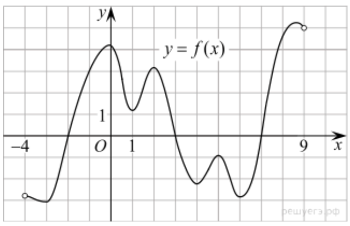
6.26



На рисунке изображён график функции ***y* = *f*(*x*)**, определённой на интервале (-3; 10). Найдите количество точек, в которых производная функции ***f*(*x*)** равна 0.

Ответ:

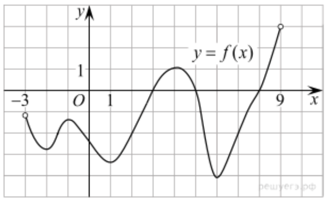
6.27



На рисунке изображён график функции ***y* = *f*(*x*)**, определённой на интервале (-4; 9). Найдите количество точек, в которых производная функции ***f*(*x*)** равна 0.

Ответ:

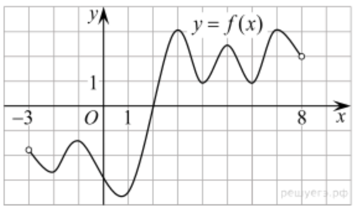
6.28



На рисунке изображен график функции ***y* = *f*(*x*),** определенной на интервале (−3; 9). Найдите количество решений уравнения ***f'*(*x*)=0** на отрезке [0; 8].

Ответ:

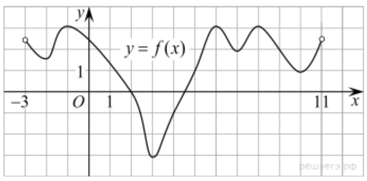
6.29



На рисунке изображён график функции ***y* = *f*(*x*)**, определённой на интервале (−3; 8). Найдите количество точек, в которых производная функции ***f*(*x*)** равна 0.

Ответ:

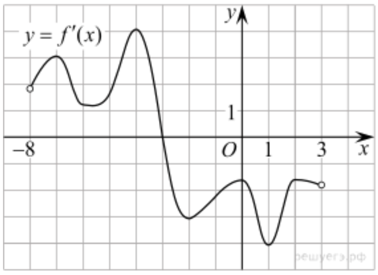
6.30



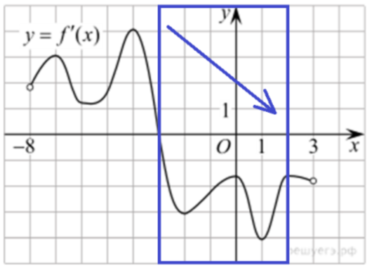
На рисунке изображён график функции ***y* = *f*(*x*)**, определённой на интервале (−3; 11). Найдите количество точек, в которых производная функции ***f*(*x*)** равна 0.

Ответ:

ПРИМЕР 5



а)



б)

На рисунке *а)* изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-8; 3). В какой точке отрезка [-3; 2] функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

РЕШЕНИЕ:

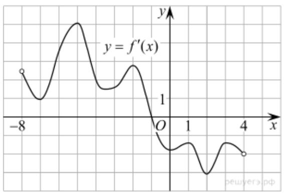
Главное - определить, что именно изображено на рисунке: график функции $y = f(x)$ *или график производной* $y = f'(x)$. *Ориентироваться лучше всего по записи на самом рисунке!*

Здесь на рисунке изображён график **производной** функции. Когда функция возрастает, производная положительна. Когда функция убывает, производная отрицательна. В точках экстремума производная равна нулю. На всём нужном нам промежутке производная отрицательна (рисунок *б)*). Это значит, что функция всё время только убывает. А если она становится всё меньше и меньше, то наибольшее значение было в самом начале, т.е. в точке -3.

УПРОЩЕНИЕ: Если график производной над осью x, то наименьшее значение функции в начале, а наибольшее - в конце. Если график производной под осью x, то наибольшее значение в начале, а наименьшее - в конце.

Ответ: -3

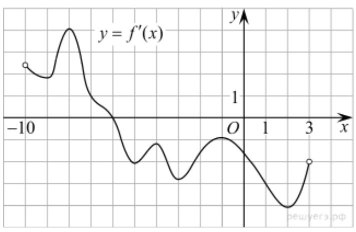
6.31



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−8; 4). В какой точке отрезка [−7; −3] $f(x)$ принимает наименьшее значение?

Ответ:

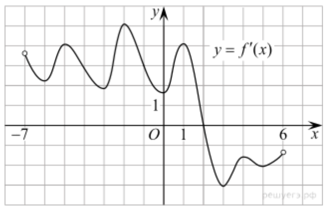
6.32



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−10; 3). В какой точке отрезка [−3; 1] $f(x)$, принимает наименьшее значение?

Ответ:

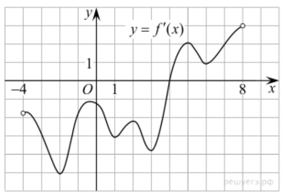
6.33



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−7; 6). В какой точке отрезка [−5;−1] $f(x)$ принимает наименьшее значение?

Ответ:

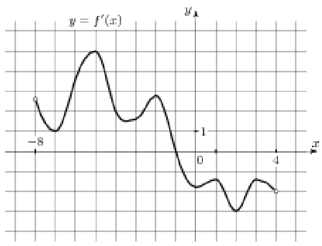
6.34



На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$, определённой на интервале (−4; 8). В какой точке отрезка [−3; 1] функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение?

Ответ:

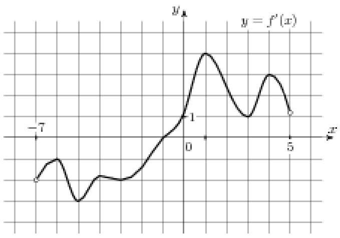
6.35



На рисунке изображен график производной функции ***y=f(x)***, определенной на интервале (-8; 4). В какой точке отрезка [-7;-3] ***f(x)*** принимает наименьшее значение?

Ответ:

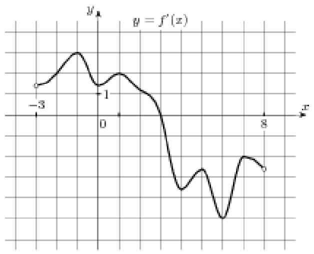
6.36



На рисунке изображен график производной функции ***y=f(x)***, определенной на интервале (-7; 5). В какой точке отрезка [-6; -1] ***f(x)*** принимает наименьшее значение?

Ответ:

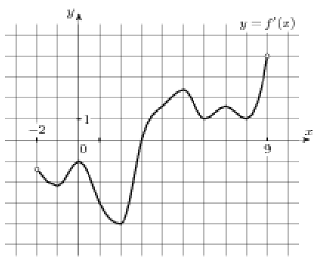
6.37



На рисунке изображен график производной функции ***y=f(x)***, определенной на интервале (-3;8). В какой точке отрезка [-2; 3] ***f(x)*** принимает наименьшее значение?

Ответ:

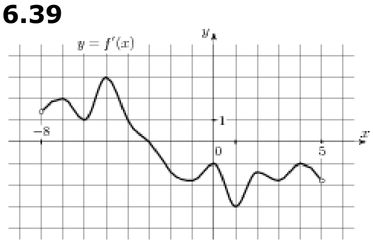
6.38



На рисунке изображен график производной функции ***y=f(x)***, определенной на интервале (-2; 9). В какой точке отрезка [-1; 3] ***f(x)*** принимает наименьшее значение?

Ответ:

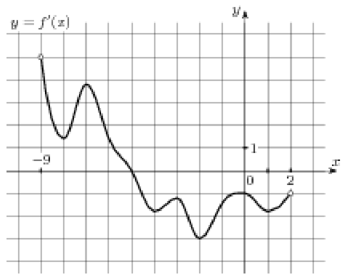
6.39



На рисунке изображен график производной функции ***y=f(x)***, определенной на интервале (-8; 5). В какой точке отрезка [-1; 3] ***f(x)*** принимает наименьшее значение?

Ответ:

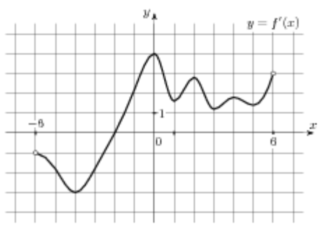
6.40



На рисунке изображен график производной функции ***y=f(x)***, определенной на интервале (-9; 2). В какой точке отрезка [-4; 0] ***f(x)*** принимает наименьшее значение?

Ответ:

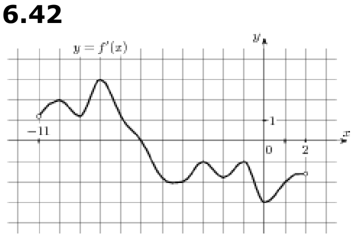
6.41



На рисунке изображен график производной функции ***y=f(x)***, определенной на интервале (-6; 6). В какой точке отрезка [-1; 4] ***f(x)*** принимает наименьшее значение?

Ответ:

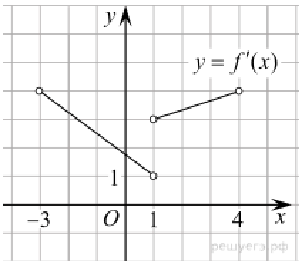
6.42



На рисунке изображен график производной функции ***y=f(x)***, определенной на интервале (-11; 2). В какой точке отрезка [-6; 0] ***f(x)*** принимает наименьшее значение?

Ответ:

ПРИМЕР 6



Функция ***f*(*x*)** определена и непрерывна на интервале (-3; 4). На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции ***f*(*x*)**. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

РЕШЕНИЕ:

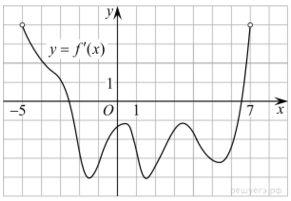
*Главное - определить, что именно изображено на рисунке: график функции **y = f(x)** или график производной **y = f'(x)**. Ориентироваться лучше всего по записи на самом рисунке!*

Здесь на рисунке изображён график **производной** функции. Когда функция возрастает, производная положительна. Когда функция убывает, производная отрицательна. В точках экстремума производная равна нулю. На всём нужном нам промежутке производная положительна. Это значит, что функция всё время только возрастает. Наибольшая сложность возникает в точке 1. Однако если функция непрерывна на каком-либо из концов промежутка возрастания или убывания (а об этом сказано в условии), то граничную точку присоединяют к этому промежутку. Получается, что функция возрастает на (-3; 4). Данный промежуток содержит целые точки -2, -1, 0, 1, 2 и 3. Их сумма равна 3. *Также обращайте внимание на скобки! Если функция непрерывна на отрезке (это квадратные скобки **[..;..]**), то границы этого отрезка тоже входят в промежутки возрастания/убывания функции!*

УПРОЩЕНИЕ: Если график производной над осью ***x***, то функция возрастает, а если под осью ***x***, то функция убывает. Просто считаем целые значения на нужном промежутке. На то, что два «кусочка» функции не соединяются, не обращаем внимание.

Ответ: 3

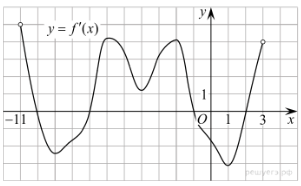
6.43



На рисунке изображен график производной функции ***f(x)***, определенной на интервале (−5; 7). Найдите промежутки убывания функции ***f(x)***. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Ответ:

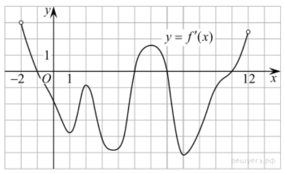
6.44



На рисунке изображен график производной функции ***f(x)***, определенной на интервале (−11; 3). Найдите промежутки возрастания функции ***f(x)***. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Ответ:

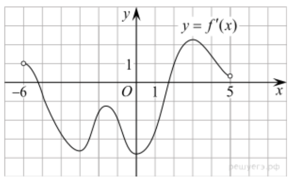
6.45



На рисунке изображен график производной функции ***f(x)***, определенной на интервале (−2; 12). Найдите промежутки убывания функции ***f(x)***. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Ответ:

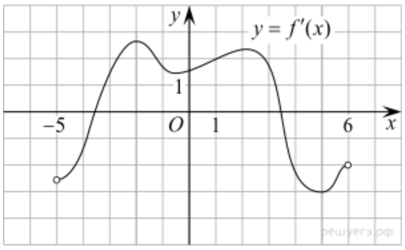
6.46



Функция ***f(x)*** определена и непрерывна на отрезке [-6; 5]. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции ***f(x)***. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Ответ:

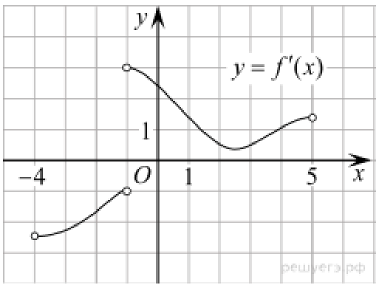
6.47



Функция ***f(x)*** определена и непрерывна на отрезке [-5; 6]. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки убывания функции ***f(x)***. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Ответ:

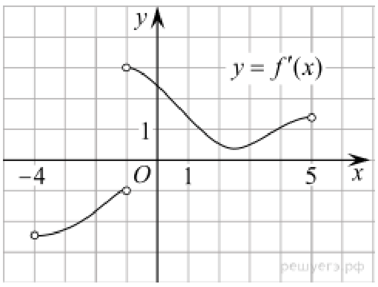
6.48



Функция ***f(x)*** определена и непрерывна на полуинтервале [-4; 5). На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки убывания функции ***f(x)***. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Ответ:

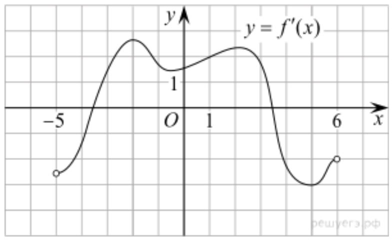
6.49



Функция ***f(x)*** определена и непрерывна на полуинтервале [-4; 5). На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции ***f(x)***. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Ответ:

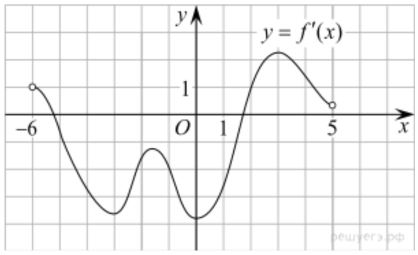
6.50



Функция ***f(x)*** определена и непрерывна на отрезке [-5; 6]. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции ***f(x)***. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Ответ:

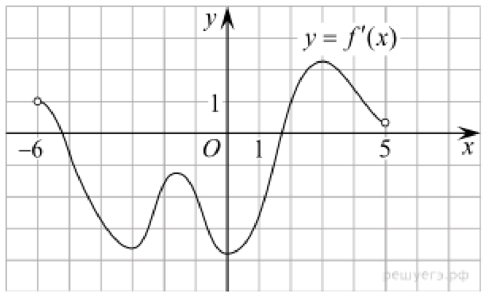
6.51



Функция ***f(x)*** определена и непрерывна на полуинтервале (-6; 5]. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции ***f(x)***. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Ответ:

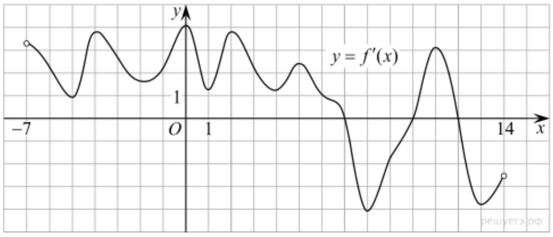
6.52



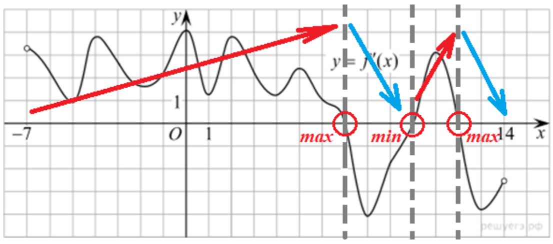
Функция ***f(x)*** определена и непрерывна на полуинтервале [-6; 5). На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции ***f(x)***. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Ответ:

ПРИМЕР 7



а)



б)

На рисунке *а)* изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 14). Найдите количество точек максимума функции *f(x)* на отрезке [−6; 9].

РЕШЕНИЕ:

Главное - определить, что именно изображено на рисунке: график функции ***y = f(x)*** *или график производной* ***y = f'(x)****. Ориентироваться лучше всего по записи на самом рисунке!*

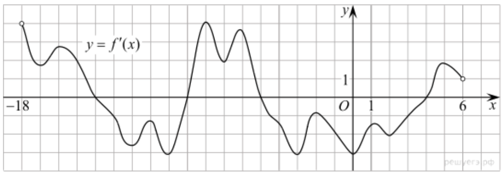
Здесь на рисунке изображён график **производной** функции. Когда функция возрастает, производная положительна. Когда функция убывает, производная отрицательна. В точках экстремума производная равна нулю. Это значит, что нам нужны точки, в которых производная проходит через ноль (пересекает ось ***x***). По рис. *а)* видно, что таких точек три: 7, 10 и 12. На промежутке (-7; 7) производная положительна. Следовательно, функция возрастает, что на рисунке *б)* показано стрелкой. На (7; 10) - убывает. На (10; 12) - возрастает. Наконец, на (12; 14) - убывает. Если до точки 7 функция возрастала, а после начала убывать, то точка 7 - это максимум. Аналогично, точка 12 тоже является максимумом. А точка 10 - минимум, т.к. до этой точки функция убывала, а после начала возрастать. В данный отрезок [−6; 9] входит только **один** экстремум (точка 7), который и является максимумом.

Если просят найти точку экстремума, то в ответ следует написать x-координату точки.

УПРОЩЕНИЕ: Если график производной пересекает ось ***x*** сверху вниз, то в этой точке максимум; если снизу вверх, то минимум.

Ответ: 1

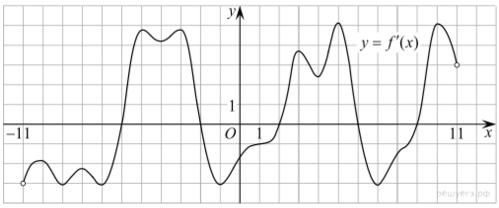
6.53



На рисунке изображен график производной функции ***f***(***x***), определенной на интервале (−18; 6). Найдите количество точек минимума функции ***f***(***x***) на отрезке [−13;1].

Ответ:

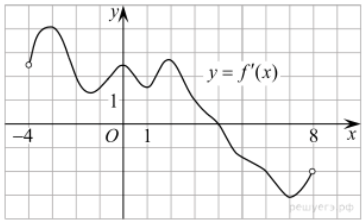
6.54



На рисунке изображен график производной функции ***f***(***x***), определенной на интервале (−11; 11). Найдите количество точек экстремума функции ***f(x)*** на отрезке [−10; 10].

Ответ:

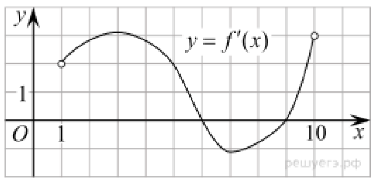
6.55



На рисунке изображен график производной функции ***f***(***x***), определенной на интервале (−4; 8). Найдите точку экстремума функции ***f(x)*** на отрезке [−2; 6].

Ответ:

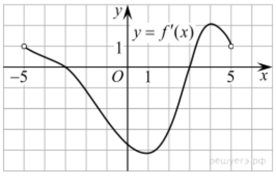
6.56



На рисунке изображён график функции ***y=f'(x)*** — производной функции ***f***(***x***) определённой на интервале (1; 10). Найдите точку минимума функции ***f***(***x***).

Ответ:

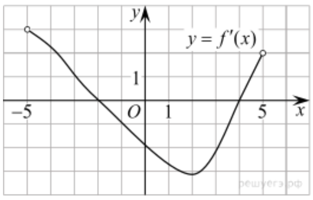
6.57



Функция ***y = f(x)*** определена и непрерывна на отрезке [−5; 5]. На рисунке изображён график её производной. Найдите точку x_0, в которой функция принимает наименьшее значение, если $f(-5) \geq f(5)$.

Ответ:

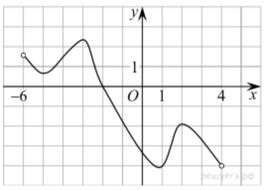
6.58



На рисунке изображён график функции ***y = f' (x)*** — производной функции ***f (x)*** определенной на интервале (−5; 5). Найдите точку минимума функции ***f(x)***.

Ответ:

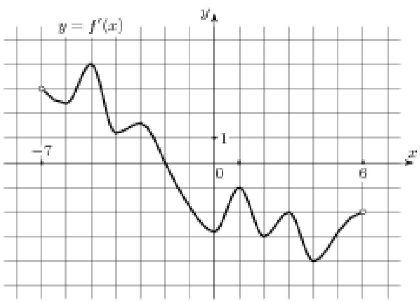
6.59



Функция ***y = f (x)*** определена на промежутке (-6; 4). На рисунке изображен график ее производной. Найдите абсциссу точки, в которой функция ***y = f (x)*** принимает наибольшее значение.

Ответ:

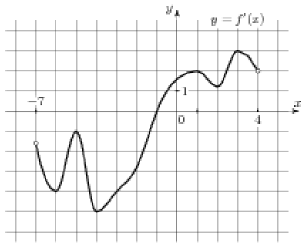
6.60



На рисунке изображен график производной функции ***y = f(x)***, определенной на интервале (-7; 6). В какой точке отрезка [-1; 5] ***f (x)*** принимает наименьшее значение?

Ответ:

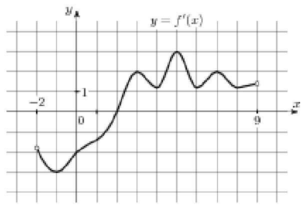
6.61



На рисунке изображен график производной функции ***y = f(x)***, определенной на интервале (-7; 4). В какой точке отрезка [-6; -1] ***f(x)*** принимает наименьшее значение?

Ответ:

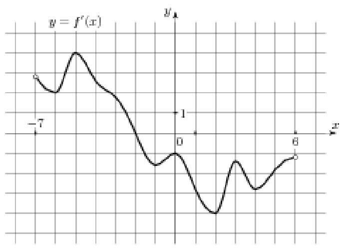
6.62



На рисунке изображен график производной функции ***y = f(x)***, определенной на интервале (-2; 9). В какой точке отрезка [2; 6] ***f(x)*** принимает наименьшее значение?

Ответ:

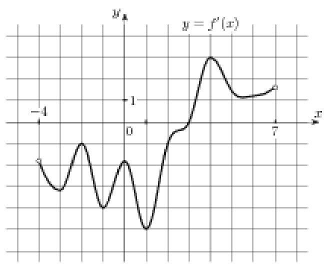
6.63



На рисунке изображен график производной функции ***y = f(x)***, определенной на интервале (-7; 6). В какой точке отрезка [-2; 4] ***f(x)*** принимает наименьшее значение?

Ответ:

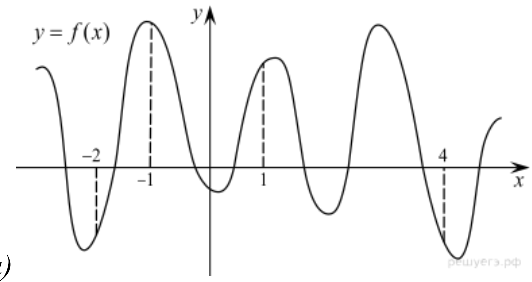
6.64



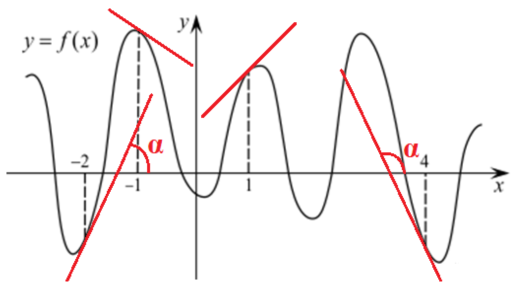
На рисунке изображен график производной функции ***y = f(x)***, определенной на интервале (-4; 7). В какой точке отрезка [-3; 1] ***f(x)*** принимает наибольшее значение?

Ответ:

ПРИМЕР 8



а)



б)

На рисунке изображен график функции ***y* = *f*(*x*)** и отмечены точки −2, −1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

РЕШЕНИЕ:

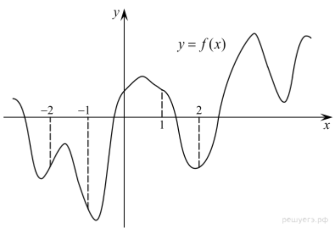
Главное - определить, что именно изображено на рисунке: график функции ***y = f(x)*** *или график производной* ***y = f'(x)****. Ориентироваться лучше всего по записи на самом рисунке!*

Здесь на рисунке изображён график **функции**. Когда функция возрастает, производная положительна. Когда функция убывает, производная отрицательна. В точках экстремума производная равна нулю. По рисунку *а)* определяем, что в точках -2 и 1 функция возрастает. Значит, в обеих точках производная положительна. В точках -1 и 4 функция убывает. Значит, в обеих точках производная отрицательна. Чем круче возрастает функция, тем больше значение производной. Чем круче функция убывает, тем меньше значение производной. Оценить крутизну производной можно, проведя касательную к данной точке (угловой коэффициент касательной **k**, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона). Рис. *б)*. Касательная в точке -2 имеет наибольший острый угол с осью ***x***. Значит в этой точке наибольшая (из представленных) производная. Касательная в точке 4 имеет наименьший тупой угол с осью ***x***. Значит в этой точке наименьшая (из представленных) производная.

УПРОЩЕНИЕ: Та касательная, которая сильнее остальных стремится вверх, говорит о самой большой производной. Та касательная, которая сильнее остальных стремится вниз, говорит о самой маленькой производной.

Ответ: 4

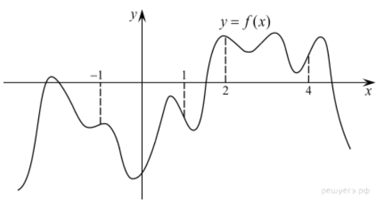
6.65



На рисунке изображен график функции ***y* = *f*(*x*)** и отмечены точки −2, −1, 1, 2. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

Ответ:

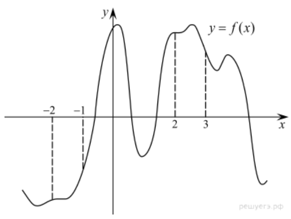
6.66



На рисунке изображен график функции ***y* = *f*(*x*)** и отмечены точки −1, 1, 2, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

Ответ:

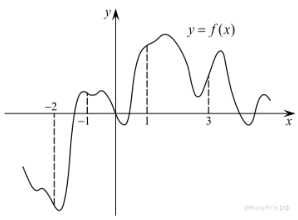
6.67



На рисунке изображен график функции ***y* = *f*(*x*)** и отмечены точки -2, -1, 2, 3. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

Ответ:

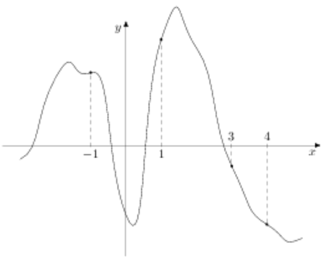
6.68



На рисунке изображен график функции ***y* = *f*(*x*)** и отмечены точки −2, −1, 1, 3. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

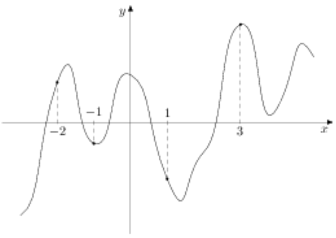
Ответ:

6.69



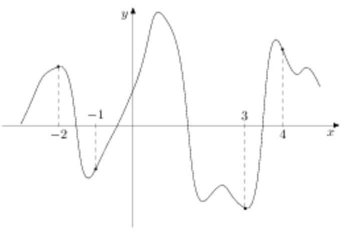
На рисунке изображен график функции ***y = f(x)*** и отмечены точки -1, 1, 3, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.
Ответ:

6.70



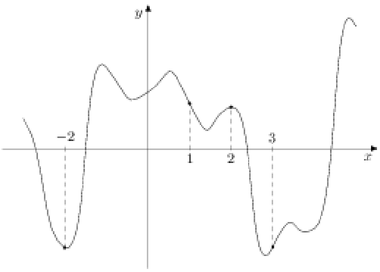
На рисунке изображен график функции ***y = f(x)*** и отмечены точки -2, -1, 1, 3. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.
Ответ:

6.71



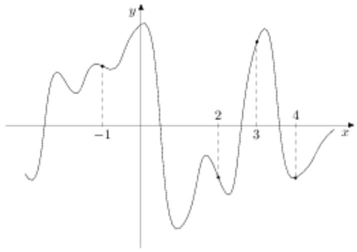
На рисунке изображен график функции ***y = f(x)*** и отмечены точки -2, -1, 3, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.
Ответ:

6.72



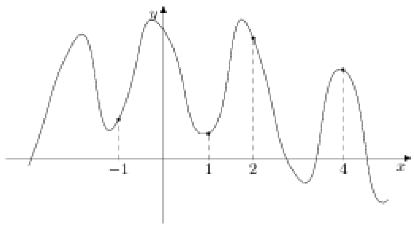
На рисунке изображен график функции ***y = f(x)*** и отмечены точки -2, 1, 2, 3. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.
Ответ:

6.73



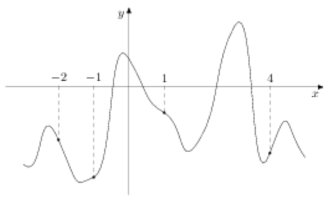
На рисунке изображен график функции ***y = f(x)*** и отмечены точки -1, 2, 3, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.
Ответ:

6.74



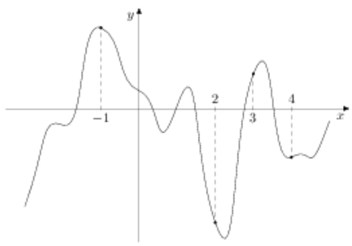
На рисунке изображен график функции ***y = f(x)*** и отмечены точки -1, 1, 2, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.
Ответ:

6.75



На рисунке изображен график функции ***y = f(x)*** и отмечены точки -2, -1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.
Ответ:

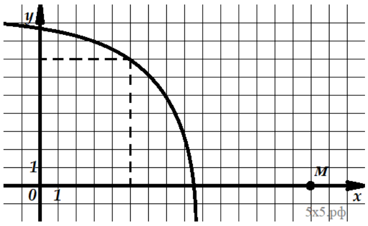
6.76



На рисунке изображен график функции ***y = f(x)*** и отмечены точки -1, 2, 3, 4. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.
Ответ:

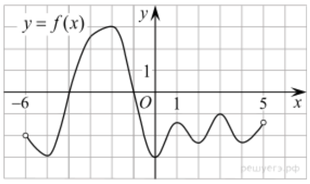
ПОВТОРЕНИЕ

1
На рисунке изображен график функции *y=f(x)*. Прямая, проходящая через точку ***M***(15;0), касается графика этой функции в точке (5;7). Найдите *f'(5)*.



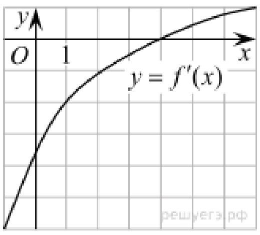
Ответ:

2



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−6; 5). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 0$.
Ответ:

3

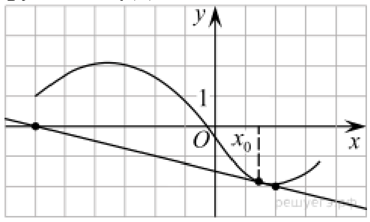


На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6 - 2x$ или совпадает с ней.
Ответ:

4
Найдите производную: $y = x^4 - 8x + 1$.
Ответ:

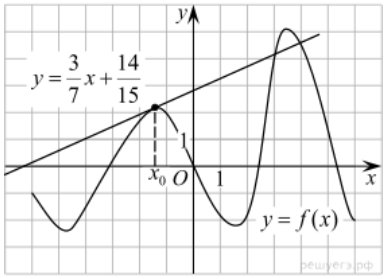
5
Найдите производную: $y = x^5 + 42x + \pi$.
Ответ:

6
На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

7



На рисунке изображены график функции *y = f(x)* и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = 3f(x) + \frac{5}{7}x - 4$ в точке x_0.
Ответ:

8
Прямая $y = 7x + 11$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

9
Прямая $y = 3x - 2$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 5x^2 + 6x + 7$. Найдите абсциссу точки касания.
Ответ:

10
Прямая $y = 4x - 2$ является касательной к графику функции $ax^2 + 28x + 14$. Найдите ***a***.
Ответ:

§7. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ?

Производная функции расстояния ***x(t)*** — функция скорости ***v(t)***, а производная функции скорости ***v(t)*** — функция ускорения.

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= a(t) \end{aligned}}$$

В качестве переменной используется время ***t***.

Также из этого следует, что функция ускорения это вторая производная функции расстояния.

$$\boxed{x''(t) = v'(t) = a(t)}$$

Производную следует находить по обычной формуле, только относительно ***t***: $(t^n)' = nt^{n-1}$

ПРИМЕР 1

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 3t + 20$ (где ***x*** — расстояние от точки отсчета в метрах, ***t*** — время в секундах, измеренное с начала движения).

1) Найдите расстояние (в метрах), на котором она будет через время ***t*** = 3с;
2) Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени ***t*** = 3с;
3) Найдите ее ускорение (в м/с^2) в момент времени ***t*** = 3с;
4) В какой момент времени ***t*** (в секундах) скорость этой материальной точки будет 23 м/с?
5) В какой момент времени ***t*** (в секундах) ускорение этой материальной точки будет 20 м/с^2?

РЕШЕНИЕ:
1) В функцию расстояния (она нам дана изначально) подставляем время ***t*** = 3с и считаем:

$$x(3) = \frac{1}{3}3^3 + 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 20 = \mathbf{74}\text{м}$$

2) Поскольку надо найти скорость, то нам нужна функция скорости. Её мы получим, взяв производную от функции расстояния:

$$v(t) = x'(t) \;\; => v(t) = t^2 + 8t + 3$$

В функцию скорости подставляем время ***t*** = 3с и считаем:

$$v(3) = 3^2 + 8 \cdot 3 + 3 = \mathbf{36}\text{м}/\text{с}$$

3) Чтобы найти ускорение, нам нужно взять производную уже от функции скорости:

$$a(t) = v'(t) \;\; => a(t) = 2t + 8$$

В функцию ускорения подставляем время ***t*** = 3с и считаем:

$$a(3) = 2 \cdot 3 + 8 = \mathbf{14}\text{м}/\text{с}^{\mathbf{2}}$$

4) Так как нам нужно узнать в какой момент времени скорость будет 23 м/с, то узнать надо именно значение ***t***, а скорость ***v*** нам дана. Её значение и подставляем в функцию скорости:

$$23 = t^2 + 8t + 3 => \left[\begin{aligned} t_1 &= -10 \\ t_2 &= 2 \end{aligned}\right. => t = \mathbf{2}c$$

5) Так как нам нужно узнать в какой момент времени ускорение будет 20 м/с^2, то узнать надо именно значение ***t***, а ускорение ***a*** нам дано. Его значение и подставляем в функцию ускорения:

$$20 = 2t + 8 => t = \mathbf{6}\text{с}$$

Ответ: 1) 74м; 2) 36м/с; 3) 14м/с^2; 4) 2с; 5) 6с.

7.1
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t+17$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.
Ответ:

7.2
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2-13t+23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?
Ответ:

7.3
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-t^4+6t^3+5t+23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 3$ с.
Ответ:

7.4
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^3-3t^2+2t$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 6$ с.
Ответ:

7.5
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2-5t+3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?
Ответ:

7.6
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-\frac{1}{3}t^3+2t^2+5t+13$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.
Ответ:

7.7
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-\frac{1}{2}t^3+8t^2+8t+10$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 6$ с.
Ответ:

7.8
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{4}t^3+2t^2-6t+20$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 8$ с.
Ответ:

7.9
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{4}t^3+2t^2+9t-7$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 8$ с.
Ответ:

7.10
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^3-6t^2-2t+18$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 5$ с.
Ответ:

7.11
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-\frac{1}{4}t^3+4t^2-t+28$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 10$ с.
Ответ:

7.12
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3+2t^2-15$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 2$ с.
Ответ:

7.13
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{4}t^2+t-10$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 5 м/с?
Ответ:

7.14
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-\frac{1}{6}t^2+5t-19$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 4 м/с?
Ответ:

7.15
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^2+6t+19$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 14 м/с?
Ответ:

7.16
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{4}t^2+9$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 4 м/с?
Ответ:

7.17
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{5}t^2+5t-23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 7 м/с?
Ответ:

7.18
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2-3t+15$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 11 м/с?
Ответ:

7.19
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{5}t^2+2t+21$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 4 м/с?
Ответ:

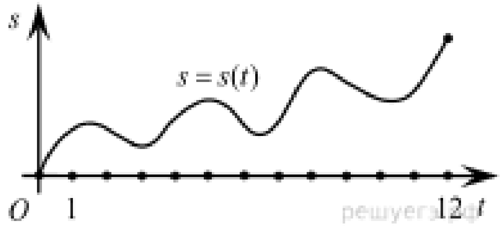
7.20
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^3+3t+\pi$, где x – расстояние от точки x=0 в метрах, t – время в секундах с начала движения. В какой момент времени её скорость составляла 15 м/с?
Ответ:

7.21
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t-ln8$, где x – расстояние от точки x=0 в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени её скорость составляла 24 м/с?
Ответ:

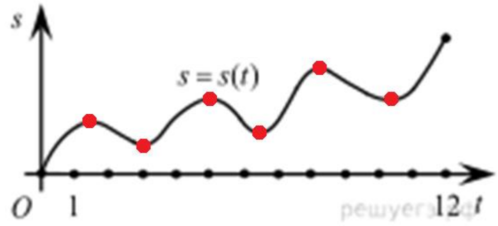
7.22
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^3-4t^2-t-8$, где x – расстояние от точки x=0 в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени её ускорение составляло 40 м/с^2?
Ответ:

7.23
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=5t^2-7t-8$, где x – расстояние от точки x=0 в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её ускорение в любой момент времени (в м/с^2).
Ответ:

ПРИМЕР 2



а)



б)

Материальная точка *M* начинает движение из точки *A* и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График на рисунке *а)* показывает, как менялось расстояние от точки *A* до точки *M* со временем. На оси абсцисс откладывается время ***t*** в секундах, на оси ординат — расстояние ***s***.

Определите, сколько раз за время движения скорость точки *M* обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).

РЕШЕНИЕ:

На рисунке показан график функции расстояния, а нас спрашивают про скорость. Так как функция скорости - это производная функции расстояния, то скорость обращается в ноль в тех точках, в которых обращается в ноль производная изображённой на рисунке функции, то есть в точках экстремума. На рисунке *б)* показано, что таких точек шесть.

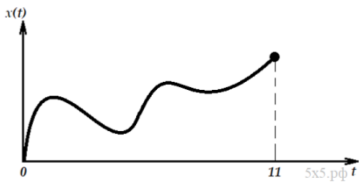
ПРИМЕЧАНИЕ:

Задачу можно решить аналитически, без применения производной. Для этого нужно заметить, что расстояние (вертикальная ось) до точки *A* становится то больше, то меньше. Значит, материальная точка то ближе к точке *A*, то дальше, то есть она несколько раз меняла направление движения на противоположное. В момент смены направления движения скорость равна нулю (чтобы начать движение в обратную сторону, сначала надо на мгновение остановиться). Эти моменты и являются экстремумами.

УПРОЩЕНИЕ: Просто считаем экстремумы и записываем в ответ их количество.

`Ответ: 6`

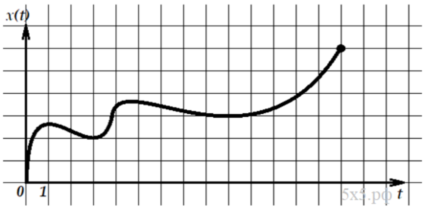
7.24



Материальная точка начинает движение из точки *O* и движется по прямой на протяжении 11 минут. График показывает, как менялось расстояние от материальной точки до точки *O* с течением времени. На оси абсцисс откладывается время ***t*** в минутах, на оси ординат — расстояние ***x*** до точки *O*. Определите, сколько раз за время движения скорость материальной точки обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).

`Ответ:`

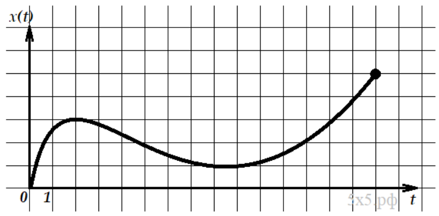
7.25



Материальная точка начинает движение из точки *O* и движется по прямой на протяжении 14 секунд. График показывает, как менялось расстояние от материальной точки до точки *O* с течением времени. На оси абсцисс откладывается время ***t*** в секундах, на оси ординат — расстояние ***x*** до точки *O*. Через сколько секунд после начала движения скорость материальной точки второй раз стала равна нулю?

`Ответ:`

7.26



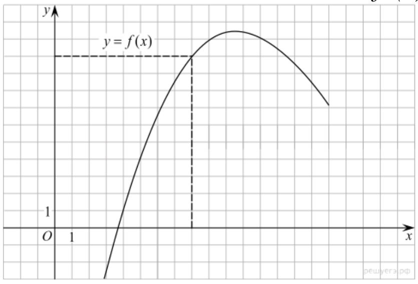
Материальная точка начинает движение из точки *O* и движется по прямой. График показывает, как менялось расстояние от материальной точки до точки *O* с течением времени. На оси абсцисс откладывается время ***t*** в минутах, на оси ординат — расстояние ***x*** до точки *O* в метрах. Через сколько минут после начала движения скорость материальной точки впервые стала равна нулю?

`Ответ:`

ПОВТОРЕНИЕ

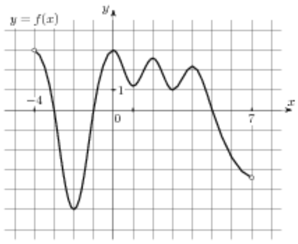
1

На рисунке изображен график функции *y=f(x)*. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите *f'(8)*.



Ответ:

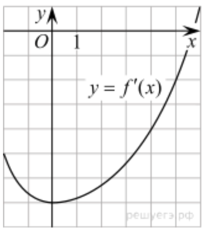
2



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-4;7). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -8$.

Ответ:

3



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -4x - 1$ или совпадает с ней.

Ответ:

4

Найдите производную: $y = x^3 - 27x$.

Ответ:

5

Найдите производную: $y = x^3 - 3x + 4$.

Ответ:

6

Прямая $y = 6x + 10$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 3x + 4$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

7

Прямая $y = -5x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 15$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

8

Прямая $y = -x + 3$ является касательной к графику функции $6x^2 - 13x + c$. Найдите ***c***.

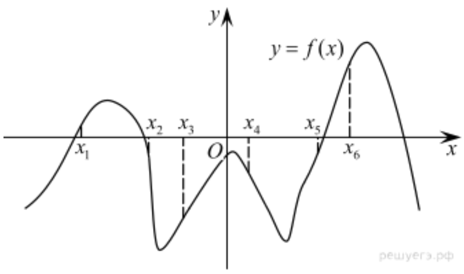
Ответ:

9

Прямая $y = 8x + 3$ является касательной к графику функции $15x^2 + bx + 18$. Найдите ***b***, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

Ответ:

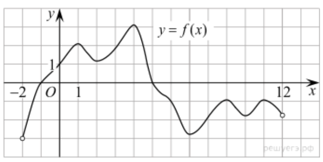
10



На рисунке изображён график функции и шесть точек на оси абсцисс. В скольких из этих точек производная функции отрицательна?

Ответ:

11



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−2; 12). Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

Ответ:

§8. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ?

Первообразной некоторой функции $y = f(x)$ называется такая функция $y = F(x)$, для которой сама функция $y = f(x)$ является производной. То есть $F'(x) = f(x)$ (производная первообразной и есть сама функция). Отсюда следует важный практический вывод:

Отношения у ***функции*** и ***производной*** такие же, $\quad f(x) \xrightarrow{\text{производная}} f'(x)$

как у ***первообразной*** и ***функции***! $\quad F(x) \xrightarrow{\text{производная}} f(x)$

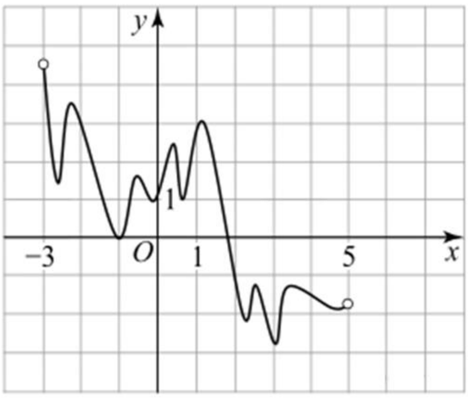
Например, для функции $f(x) = 9x^2 + 6x + 4$ функция $f'(x) = 18x + 6$ является производной, т.к.

$$(9x^2 + 6x + 4)' = 18x + 6;$$

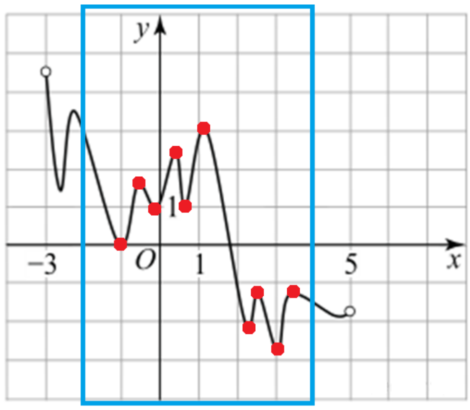
а функция $F(x) = 3x^3 + 3x^2 + 4x + 7$ является одной из первообразных, т.к.

$$(3x^3 + 3x^2 + 4x + 7)' = 9x^2 + 6x + 4.$$

ПРИМЕР 1



а)



б)

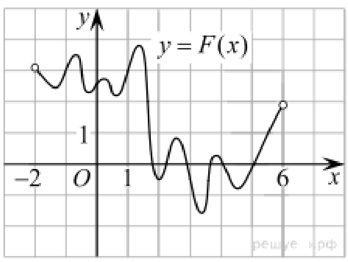
На рисунке *а)* изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале (−3; 5). Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке [−2; 4].

РЕШЕНИЕ: На рисунке *а)* изображён график первообразной, а нужно найти количество решений уравнения $f(x) = 0$, то есть количество точек, в которых $f(x) = 0$. А так как $f(x)$ является производной для $F(x)$, которая изображена на рисунке, то нам нужны точки, в которых производная равна нулю (касательная параллельна оси x), то есть экстремумы на требуемом отрезке. Это показано на рисунке *а)*.

<u>**УПРОЩЕНИЕ:**</u> Считаем максимумы и минимумы на нужном отрезке. Их количество записываем в ответ.

Ответ: 10

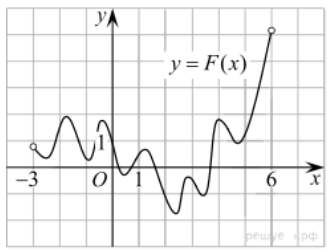
8.1



На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $y = f(x)$, определённой на интервале (-2;6). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке [-1;5].

Ответ:

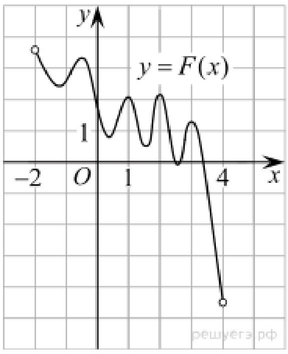
8.2



На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $y = f(x)$, определённой на интервале (-3;6). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке [-2;5].

Ответ:

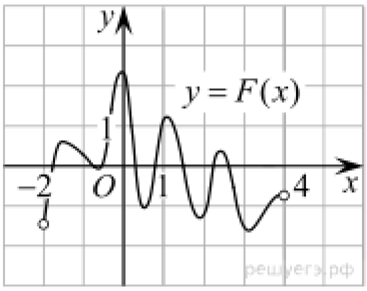
8.3



На рисунке изображён график функции ***y* = *F*(*x*)** — одной из первообразных некоторой функции ***f(x)***, определённой на интервале (-2;4). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения ***f(x)* = 0** на отрезке [-1;3].

Ответ:

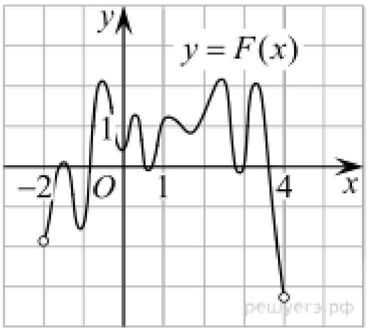
8.4



На рисунке изображён график функции ***y* = *F*(*x*)** — одной из первообразных некоторой функции ***f(x)***, определённой на интервале (-2;4). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения ***f(x)* = 0** на отрезке [−1;3].

Ответ:

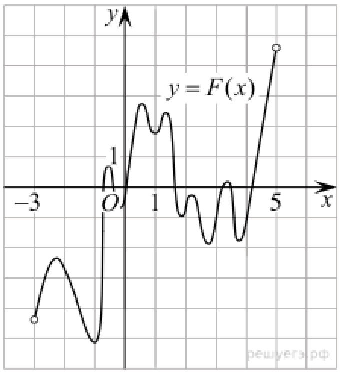
8.5



На рисунке изображён график функции ***y* = *F*(*x*)**, которая является одной из первообразных некоторой функции ***f(x)***, определённой на интервале (-2;4). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения ***f(x)* = 0** на отрезке [−1;3].

Ответ:

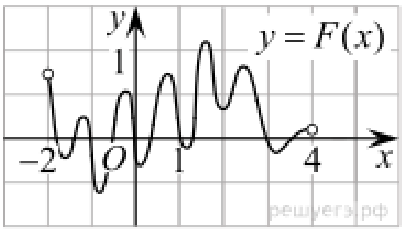
8.6



На рисунке изображён график функции ***y* = *F*(*x*)** — одной из первообразных некоторой функции ***f(x)***, определённой на интервале (-3;5). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения ***f(x)* = 0** на отрезке [−2;4].

Ответ:

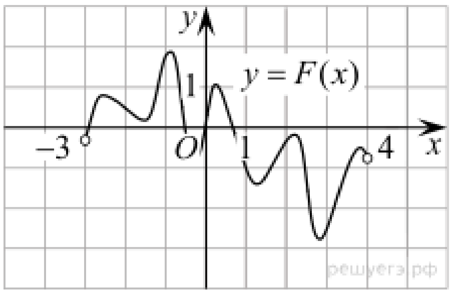
8.7



На рисунке изображён график функции ***y* = *F*(*x*)** — одной из первообразных некоторой функции ***f(x)***, определённой на интервале (-2;4). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения ***f(x)* = 0** на отрезке [−1;3].

Ответ:

8.8

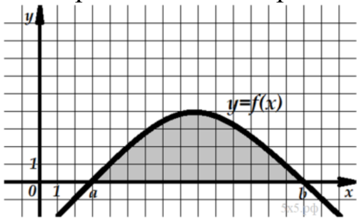


На рисунке изображён график функции ***y* = *F*(*x*)** — одной из первообразных функции ***f*(*x*)**, определённой на интервале (−3;4). Найдите количество решений уравнения ***f(x)* = 0** на отрезке [−2;3].

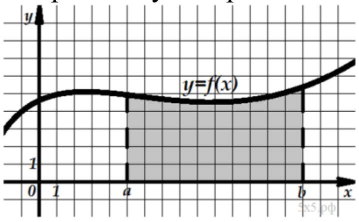
Ответ:

ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ?

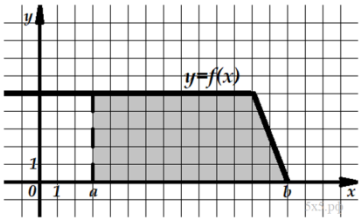
С помощью первообразной можно вычислять площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной функцией ***y = f(x)*** с одной стороны, и осью ***x*** с другой. На рисунках *а), б)* и *в)* показаны криволинейные трапеции, которые могут встретиться.



а)



б)



в)

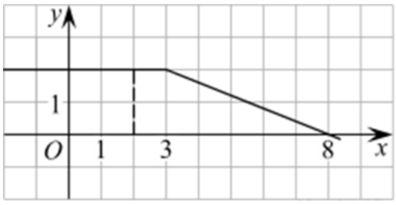
Каждая из них ограничена функцией ***y = f(x)*** сверху, осью ***x*** снизу, значением ***a*** слева и значением ***b*** справа. Значения ***a*** и ***b*** могут быть «естественными», если они образованы пересечением функции с осью ***x*** (рис. *а)*) или «искусственными», если они заданы отдельно на рисунке и/или в тексте задания (рис. *б)*). Также встречается их комбинация (рис. *в)*).

Площадь **любой** из этих трапеций можно найти с помощью интеграла, который в свою очередь вычисляется как разность первообразной от правого числа ***b*** и первообразной от левого числа ***a***:

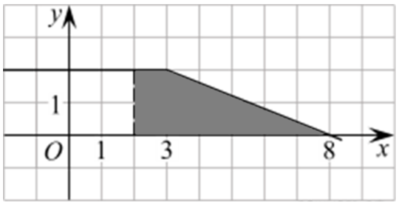
$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).\ (*)$$

Формула (*) – основная формула в этой теме!

ПРИМЕР 2



а)



б)

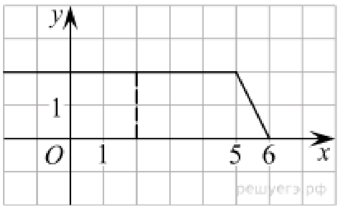
На рисунке *а)* изображён график некоторой функции ***y = f(x)*** (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите ***F*(8) − *F*(2)**, где ***F*(*x*)** — одна из первообразных функции ***f*(*x*)**.

РЕШЕНИЕ: По условию задачи необходимо вычислить ***F*(8) − *F*(2)**, а именно так в соответствии с формулой (*) и вычисляется площадь криволинейной трапеции от **2** до **8** (по оси ***x***). На рисунке *б)* показана фигура, площадь которой вычисляется как ***F*(8) − *F*(2)**. Эта фигура является трапецией, оба основания и высоту которой можно определить по рисунку, считая клеточки. Меньшее основание равно 1; большее основание равно 6; высота равна 2. Пользуясь формулой площади трапеции, находим: $S = \frac{1+6}{2} \cdot 2 = 7$.

<u>УПРОЩЕНИЕ:</u> Рисуем вертикальные линии на числах **n** и **m**, которые берём там, где написано ***F*(n) − *F*(m)**. Иногда линия (линии) уже проведены. Находим площадь той фигуры, которая получилась. Это и есть ответ.

Ответ: 7

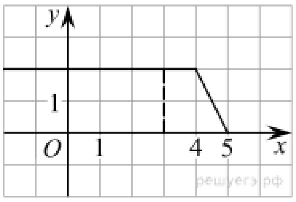
8.9



На рисунке изображён график некоторой функции ***y = f(x)*** (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите ***F*(6) − *F*(2)**, где ***F*(*x*)** — одна из первообразных функции ***f(x)***.

Ответ:

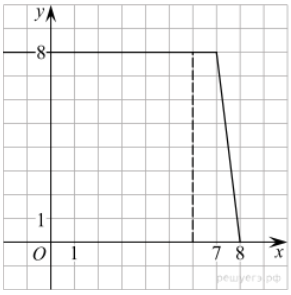
8.10



На рисунке изображён график некоторой функции ***y = f(x)*** (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите ***F*(5) − *F*(3)**, где ***F*(*x*)** — одна из первообразных функции ***f(x)***.

Ответ:

8.11



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(6)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

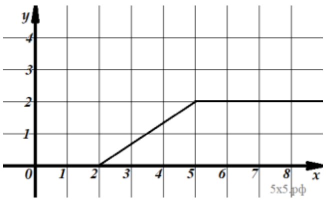
Ответ:

8.12

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(6) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Ответ:

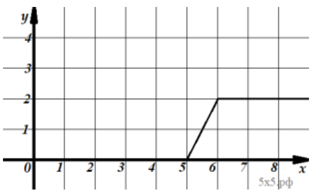
8.13



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(6) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Ответ:

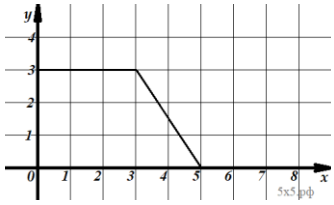
8.14



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(5)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Ответ:

8.15



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(5) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

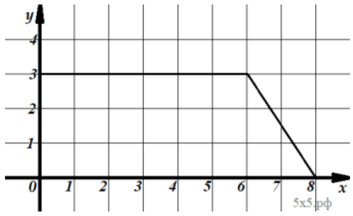
Ответ:

8.16

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(6) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Ответ:

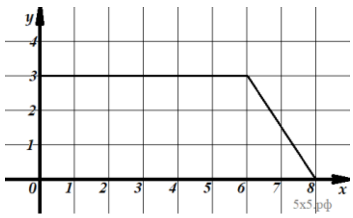
8.17



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Ответ:

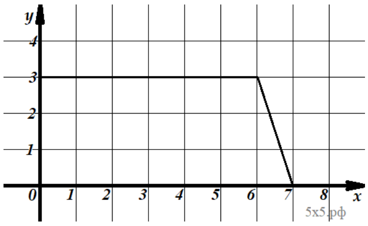
8.18



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Ответ:

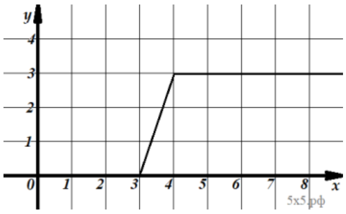
8.19



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Ответ:

8.20



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(6) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

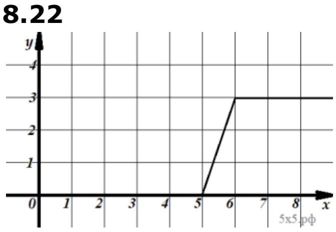
Ответ:

8.21

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Ответ:

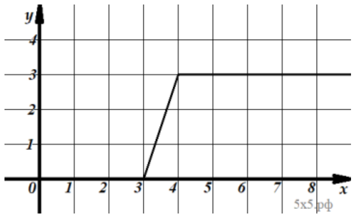
8.22



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(5)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Ответ:

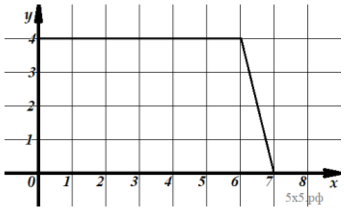
8.23



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Ответ:

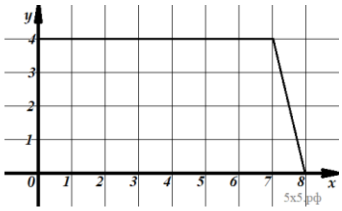
8.24



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Ответ:

8.25



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

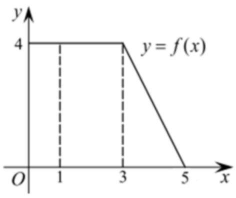
Ответ:

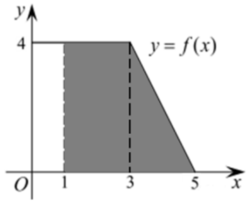
8.26

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Ответ:

ПРИМЕР 3

а) 

б) 

На рисунке *а)* изображен график некоторой функции ***y = f(x)***. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_1^5 f(x)\,dx.$$

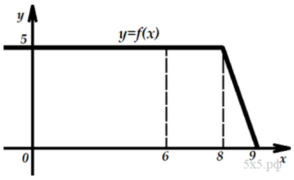
РЕШЕНИЕ: По условию задачи необходимо вычислить *указанный интеграл*, а именно так [формула (*)] и вычисляется площадь криволинейной трапеции от **1** до **5** (по оси ***x***). На рисунке *б)* показана фигура, площадь которой вычисляется как ***интеграл от 1 до 5 (числа снизу и сверху значка интеграла)***. Число **3** на рисунке показано для того, чтобы можно было точно определить границы верхнего основания трапеции. Оба основания и высоту трапеции можно определить по рисунку, изучив координаты каждой вершины фигуры. Меньшее основание равно 2; большее основание равно 4; высота равна 4. Пользуясь формулой площади трапеции, находим:

$S = \frac{2+4}{2} \cdot 4 = 12.$

<u>УПРОЩЕНИЕ:</u> Определяем фигуру, площадь которой нужно найти. Её границы слева и справа написаны снизу и сверху значка интеграла. Верхнее и нижнее основания трапеции можно вычислить как разность чисел, написанных возле оси ***x*** (снизу). Высота трапеции - это число, написанное возле оси ***y*** (слева). Находим площадь той фигуры, которая получилась. Это и есть ответ.

Ответ: 12

8.27

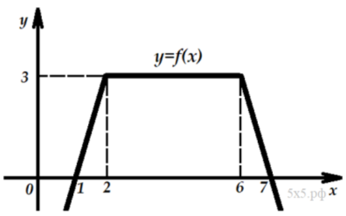


На рисунке изображен график некоторой функции ***y = f(x)***. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_6^9 f(x)\,dx.$$

Ответ:

8.28

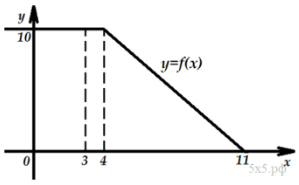


На рисунке изображен график некоторой функции ***y = f(x)***. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_1^7 f(x)\,dx.$$

Ответ:

8.29

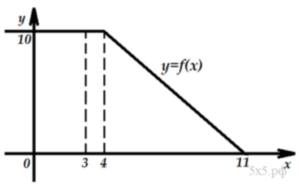


На рисунке изображен график некоторой функции ***y = f(x)***. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_3^{11} f(x)\,dx.$$

Ответ:

8.30

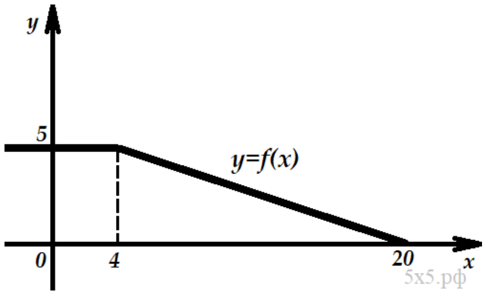


На рисунке изображен график некоторой функции ***y = f(x)***. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_4^{11} f(x)\,dx.$$

Ответ:

8.31

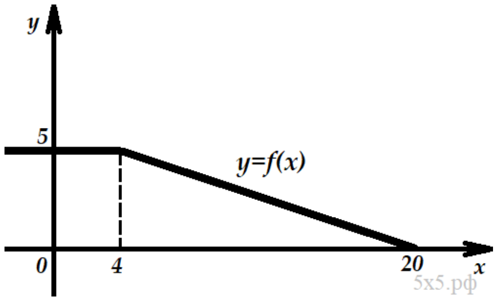


На рисунке изображен график некоторой функции ***y* = *f(x)***. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_0^{20} f(x)\,dx.$$

Ответ:

8.32

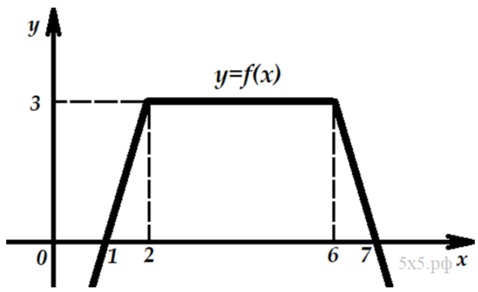


На рисунке изображен график некоторой функции ***y* = *f(x)***. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_4^{20} f(x)\,dx.$$

Ответ:

8.33

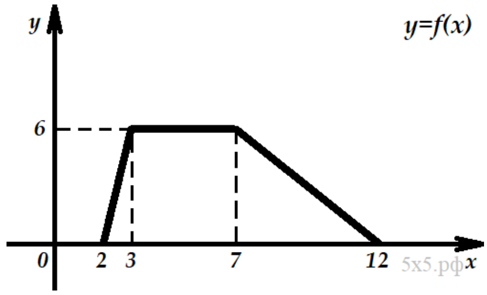


На рисунке изображен график некоторой функции ***y* = *f(x)***. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_2^{7} f(x)\,dx.$$

Ответ:

8.34

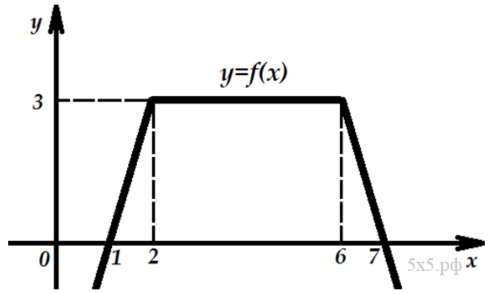


На рисунке изображен график некоторой функции ***y* = *f(x)***. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_2^{12} f(x)\,dx.$$

Ответ:

8.35

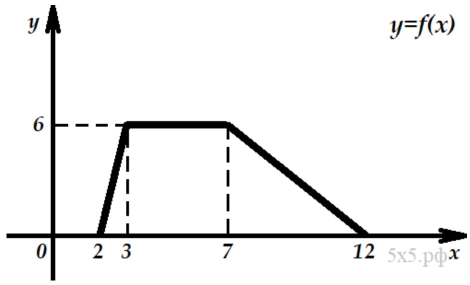


На рисунке изображен график некоторой функции ***y* = *f(x)***. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_2^{6} f(x)\,dx.$$

Ответ:

8.36

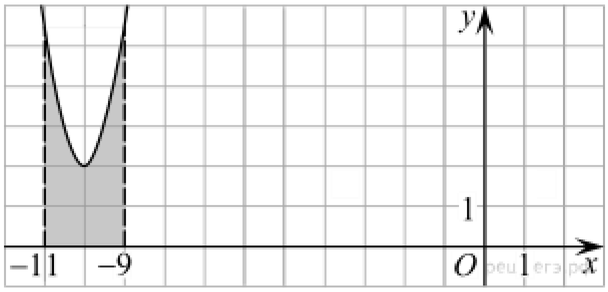


На рисунке изображен график некоторой функции ***y* = *f(x)***. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_2^{7} f(x)\,dx.$$

Ответ:

ПРИМЕР 4



На рисунке изображён график функции ***y*** **=** ***f*****(*****x*****)**. Функция $F(x)=x^3+30x^2+302x-\frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции ***y*** **=** ***f*****(*****x*****)**. Найдите площадь закрашенной фигуры.

РЕШЕНИЕ:
Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле (*) как разность первообразных от правой и левой координат границ фигуры. То есть в данном случае **S = F(-9) – F(-11)**. В таких заданиях вычислять первообразную самостоятельно не нужно - она уже дана в тексте. Необходимо только подставить значения согласно формуле и вычислить площадь:

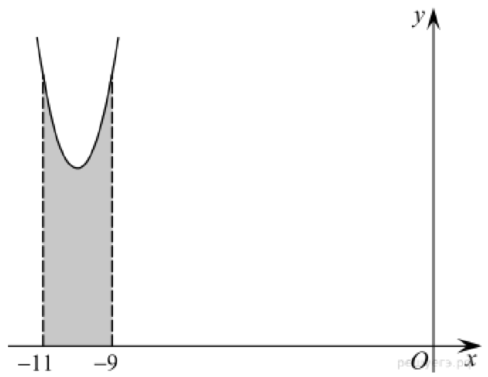
$$S=F(-9)-F(-11)=$$
$$=\left((-9)^3+30\cdot(-9)^2+302\cdot(-9)-\frac{15}{8}\right)-\left((-11)^3+30\cdot(-11)^2+302\cdot(-11)-\frac{15}{8}\right)=6.$$

Стоит обратить внимание на то, что после раскрытия скобок **свободные коэффициенты в любом случае сократятся!** Как правило, в заданиях они дробные и «неудобные», но на них можно не обращать внимания вовсе.

<u>УПРОЩЕНИЕ:</u> Подставляем в ***F(x)*** правую границу фигуры вместо каждого ***x***, потом подставляем в ***F(x)*** левую границу фигуры вместо каждого ***x***. Вычитаем одно из другого. Результат записываем в ответ. Если всё посчитано правильно, но результат получился отрицательный, то просто зачёркиваем минус и записываем результат в ответ.

Ответ: 6

8.37

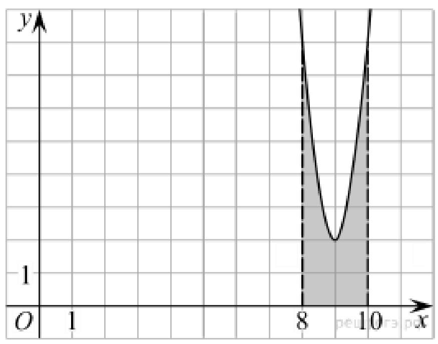


На рисунке изображён график некоторой функции ***y*** **=** ***f*****(*****x*****)**.

Функция $F(x)=x^3+30x^2+305x-\frac{7}{5}$ — одна из первообразных функции ***f*****(*****x*****)**. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.38

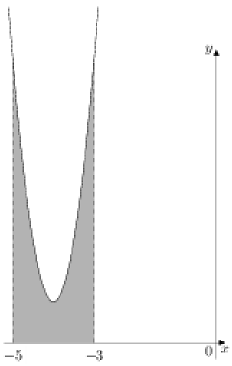


На рисунке изображён график некоторой функции ***y*** **=** ***f*****(*****x*****)**.

Функция $F(x)=2x^3-54x^2+488x-\frac{3}{4}$ — одна из первообразных функции ***f*****(*****x*****)**. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

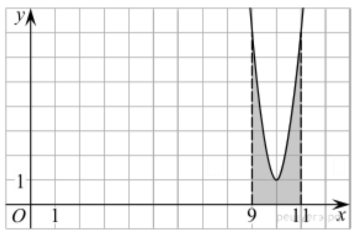
8.39



На рисунке изображён график некоторой функции ***y* = *f*(*x*).**

Функция $F(x)=2x^3+24x^2+97x-\frac{20}{3}$ — одна из первообразных функции ***f*(*x*).** Найдите площадь закрашенной фигуры.
Ответ:

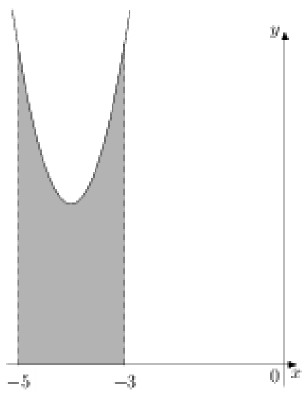
8.40



На рисунке изображён график функции ***y* = *f*(*x*).**

Функция $F(x)=2x^3-60x^2+601x-\frac{12}{7}$ — одна из первообразных функции ***f*(*x*).** Найдите площадь закрашенной фигуры.
Ответ:

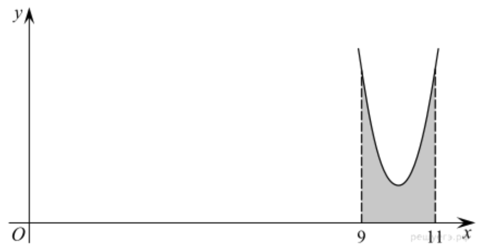
8.41



На рисунке изображён график некоторой функции ***y* = *f*(*x*).**

Функция $F(x)=x^3+12x^2+51x-3$ — одна из первообразных функции ***f*(*x*).** Найдите площадь закрашенной фигуры.
Ответ:

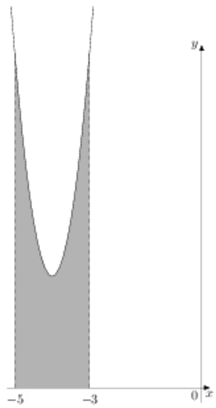
8.42



На рисунке изображён график некоторой функции ***y* = *f*(*x*).**

Функция $F(x)=x^3-30x^2+301x-\frac{1}{9}$ — одна из первообразных функции ***f*(*x*).** Найдите площадь закрашенной фигуры.
Ответ:

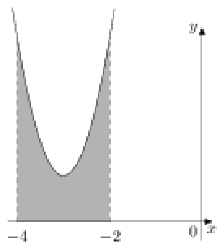
8.43



На рисунке изображён график некоторой функции ***y* = *f*(*x*).**

Функция $F(x)=2x^3+24x^2+99x-\frac{7}{4}$ — одна из первообразных функции ***f*(*x*).** Найдите площадь закрашенной фигуры.
Ответ:

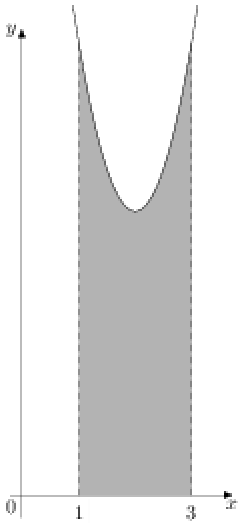
8.44



На рисунке изображён график некоторой функции ***y* = *f*(*x*).**

Функция $F(x)=x^3+9x^2+28x-\frac{6}{7}$ — одна из первообразных функции ***f*(*x*).** Найдите площадь закрашенной фигуры.
Ответ:

8.45

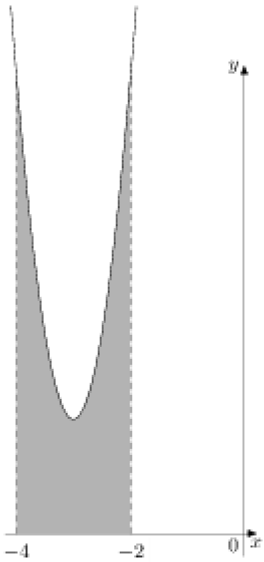


На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = x^3 - 6x^2 + 17x - \frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.46

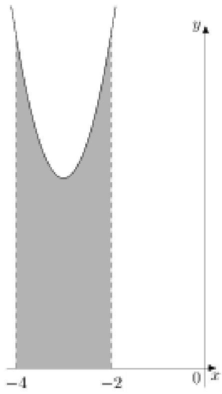


На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = 2x^3 + 18x^2 + 56x - \frac{1}{12}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.47

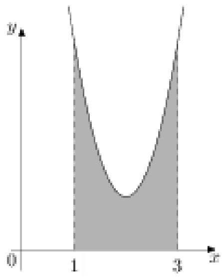


На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = x^3 + 9x^2 + 31x - 1$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.48

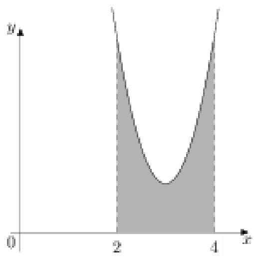


На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - \frac{19}{3}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.49

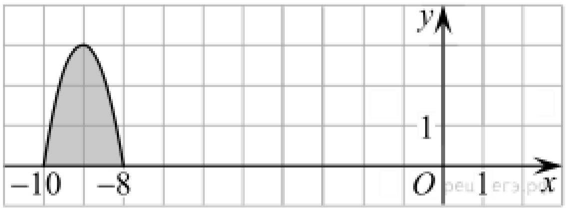


На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = x^3 - 9x^2 + 28x - \frac{20}{3}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

ПРИМЕР 5



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

РЕШЕНИЕ:

Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле (*) как разность первообразных от правой и левой координат границ фигуры. То есть в данном случае **S = F(-8) – F(-10)**. В таких заданиях вычислять первообразную самостоятельно не нужно - она уже дана в тексте. Необходимо только подставить значения согласно формуле и вычислить площадь:

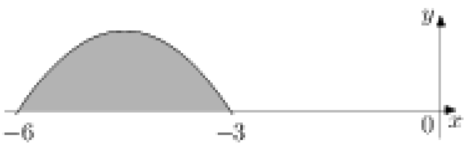
$$S = F(-8) - F(-10) =$$
$$= (-(-8)^3 - 27 \cdot (-8)^2 - 240 \cdot (-8) - 8) - (-(-10)^3 - 27 \cdot (-10)^2 - 240 \cdot (-10) - 8) = 4.$$

Стоит обратить внимание на то, что после раскрытия скобок **свободные коэффициенты в любом случае сократятся!**

УПРОЩЕНИЕ: Подставляем в ***F(x)*** правую границу фигуры вместо каждого ***x***, потом подставляем в ***F(x)*** левую границу фигуры вместо каждого ***x***. Вычитаем одно из другого. Результат записываем в ответ. Если всё посчитано правильно, но результат получился отрицательный, то просто зачёркиваем минус и записываем результат в ответ.

Ответ: 4

8.50

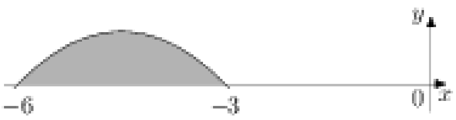


На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - 9x - \frac{5}{2}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.51

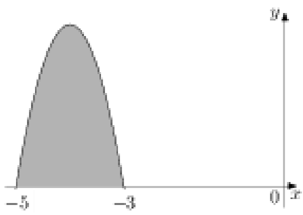


На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 4$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.52

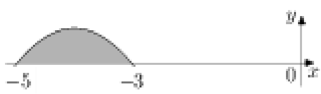


На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -x^3 - 12x^2 - 45x - \frac{8}{7}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.53

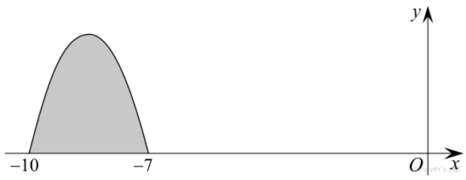


На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{1}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 - 9x - \frac{3}{5}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.54

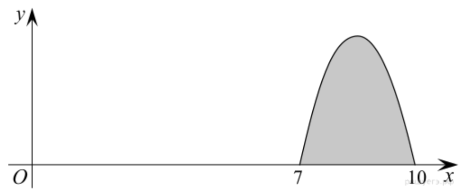


На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{34}{3}x^2 - \frac{280}{3}x - \frac{18}{5}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.55



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{51}{4}x^2 - 105x - 3$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.56

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{51}{10}x^2 - 42x - \frac{7}{11}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

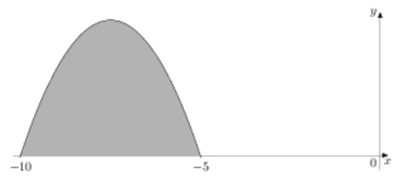
8.57

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{17}{4}x^2 - 35x - \frac{5}{11}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.58

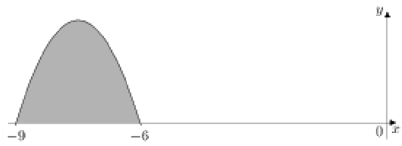


На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{1}{5}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 30x - \frac{11}{8}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.59



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{11}{30}x^3 - \frac{33}{4}x^2 - \frac{297}{5}x - \frac{1}{2}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

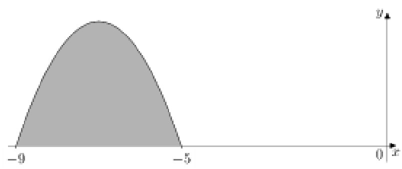
8.60

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{7}{27}x^3 - \frac{35}{6}x^2 - 42x - \frac{7}{4}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.61



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{21}{4}x^2 - \frac{135}{4}x - \frac{13}{2}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.62

На рисунке изображён график некоторой функции **y = f(x)**.

Функция $F(x)=-x^3-21x^2-144x-\frac{11}{4}$ — одна из первообразных функции **f(x)**. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.63

На рисунке изображён график некоторой функции **y = f(x)**.

Функция $F(x)=-\frac{5}{8}x^3-\frac{105}{8}x^2-90x-\frac{1}{2}$ — одна из первообразных функции **f(x)**. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

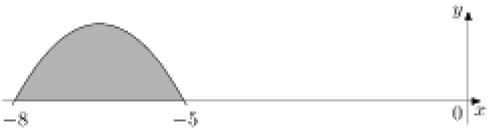
8.64

На рисунке изображён график некоторой функции **y = f(x)**.

Функция $F(x)=-\frac{1}{10}x^3-\frac{21}{10}x^2-\frac{72}{5}x-\frac{4}{3}$ — одна из первообразных функции **f(x)**. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.65

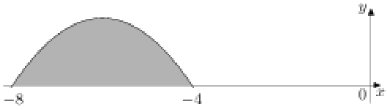


На рисунке изображён график некоторой функции **y = f(x)**.

Функция $F(x)=-\frac{1}{5}x^3-\frac{39}{10}x^2-24x-\frac{7}{6}$ — одна из первообразных функции **f(x)**. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.66

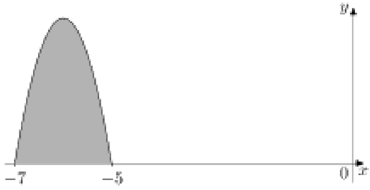


На рисунке изображён график некоторой функции **y = f(x)**.

Функция $F(x)=-\frac{1}{8}x^3-\frac{9}{4}x^2-12x-\frac{9}{2}$ — одна из первообразных функции **f(x)**. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.67

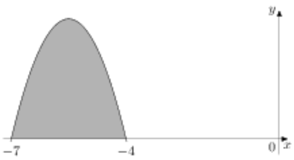


На рисунке изображён график некоторой функции **y = f(x)**.

Функция $F(x)=-x^3-18x^2-105x-20$ — одна из первообразных функции **f(x)**. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.68

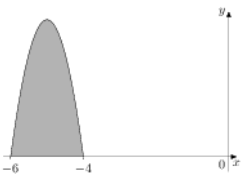


На рисунке изображён график некоторой функции **y = f(x)**.

Функция $F(x)=-\frac{7}{15}x^3-\frac{77}{10}x^2-\frac{196}{5}x-2$ — одна из первообразных функции **f(x)**. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

8.69



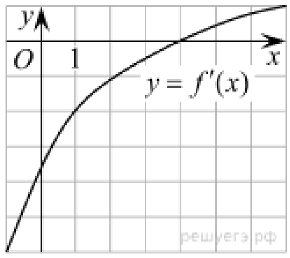
На рисунке изображён график некоторой функции **y = f(x)**.

Функция $F(x)=-\frac{5}{4}x^3-\frac{75}{4}x^2-90x-10$ — одна из первообразных функции **f(x)**. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Ответ:

ПОВТОРЕНИЕ

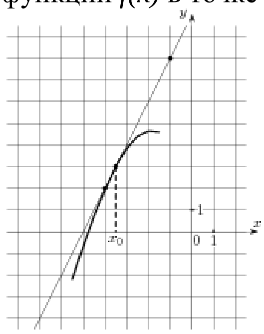
1



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6 - 2x$ или совпадает с ней.
Ответ:

2

На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Ответ:

3

Найдите производную: ***y = 4π + 3x + 1000.***
Ответ:

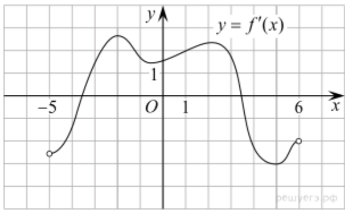
4

Прямая $y = -4x - 9$ является касательной к графику функции $13x^2 - 30x + c$. Найдите *c*.
Ответ:

5

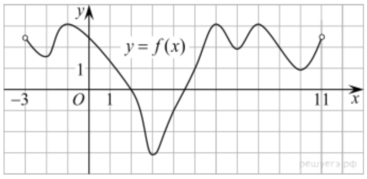
Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{5}t^2 + 2t + 21$ (где *x* — расстояние от точки отсчета в метрах, *t* — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 4 м/с?
Ответ:

6



Функция ***f(x)*** определена и непрерывна на отрезке [-5; 6]. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки убывания функции ***f(x)***. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.
Ответ:

7

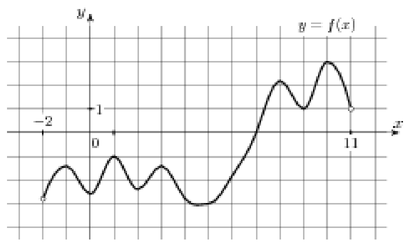


На рисунке изображён график функции ***y* = *f*(*x*)**, определённой на интервале (−3; 11). Найдите количество точек, в которых производная функции ***f*(*x*)** равна 0.
Ответ:

8

Прямая $y = x + 7$ является касательной к графику функции $ax^2 - 15x + 15$. Найдите ***a***.
Ответ:

9



На рисунке изображен график функции *y* = *f*(*x*), определенной на интервале (-2;11). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой *y* = 1.
Ответ:

10

Найдите производную: ***y = 10x + 10π + 10.***
Ответ: